

LIMITES

A Teoria dos Limites, tópicos introdutório e fundamental da Matemática Superior, será vista aqui, de uma forma simplificada, sem aprofundamentos, até porque, o nosso objectivo nesta página, é abordar os tópicos ao nível do segundo grau, voltado essencialmente para os exames nacionais. Portanto, o que veremos a seguir, será uma introdução à Teoria dos Limites, dando ênfase principalmente ao cálculo de limites de funções, com base nas propriedades pertinentes. O estudo teórico e avançado, vocês verão na Universidade, no devido tempo. Outro aspecto importante a ser comentado, é que este capítulo de LIMITES abordará o estritamente necessário para o estudo do próximo tópico: DERIVADAS. O matemático francês Augustin Louis CAUCHY - 1789/1857, foi, entre outros, um grande estudioso da TEORIA DOS LIMITES. Antes dele, Isaac NEWTON - inglês - 1642 /1727 e Gottfried Wilhelm LEIBNIZ - alemão - 1646 /1716, já haviam desenvolvido o Cálculo Infinitesimal.

Definição:

Dada a função $y = f(x)$, definida no intervalo real (a, b) , dizemos que esta função f possui um limite finito L quando x tende para um valor x_0 , se para cada número positivo ϵ , por menor que seja, existe em correspondência um número positivo δ , tal que :

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon, \text{ para todo } x \neq x_0.$$

Indicamos que L é o limite de uma função $f(x)$ quando x tende a x_0 , através da simbologia abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Exercício:

Prove, usando a definição de limite vista acima, que:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x + 5) = 8$$

Temos no caso:

$$\lim_{x_0 \rightarrow 3} f(x) = x + 5 = 3 + 5 = 8$$

$$L = 8.$$

Com efeito, deveremos provar que dado um $\epsilon > 0$ arbitrário, deveremos encontrar um $\delta > 0$, tal que, para $|x - 3| < \delta$, se tenha $|(x + 5) - 8| < \epsilon$. Ora, $|(x + 5) - 8| < \epsilon$ é equivalente a $|x - 3| < \epsilon$. Portanto, a desigualdade $|x - 3| < \delta$, é verificada, e neste caso $\delta = \epsilon$. Concluimos então que 8 é o limite da função para x tendendo a 3.

O cálculo de limites pela definição, para funções mais elaboradas, é extremamente laborioso e de relativa complexidade.

Assim é que, apresentaremos as propriedades básicas, sem demonstrá-las e, na sequência, as utilizaremos para o cálculo de limites de funções. Antes, porém, valem as seguintes observações preliminares:

a) É conveniente observar que a existência do limite de uma função, quando $x \rightarrow x_0$, não depende necessariamente que a função esteja definida no ponto x_0 , pois quando calculamos um limite, consideramos os valores da função tão próximos quanto queiramos do ponto x_0 , porém não coincidente com x_0 , ou seja, consideramos os valores da função na vizinhança do ponto x_0 . Para exemplificar, consideremos o cálculo do limite da função abaixo, para $x \rightarrow 3$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Observe que para $x = 3$ a função não é definida. Entretanto, lembrando que $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$, substituindo e simplificando, a função fica igual a $f(x) = x + 3$, cujo limite para $x \rightarrow 3$ é igual a 6, obtido pela substituição directa de x por 3.

b) O limite de uma função $y = f(x)$, quando $x \in x_0$, pode inclusive, não existir, mesmo a função estando definida neste ponto x_0 , ou seja, existindo $f(x_0)$.

c) Ocorrerão casos nos quais a função $f(x)$ não está definida no ponto x_0 , porém existirá o limite de $f(x)$ quando $x \neq x_0$.

d) Nos casos em que a função $f(x)$ estiver definida no ponto x_0 , e existir o limite da função $f(x)$ para $x \neq x_0$ e este limite coincidir com o valor da função no ponto x_0 , diremos que a função $f(x)$ é contínua no ponto x_0 .

e) Já vimos a definição do limite de uma função $f(x)$ quando x tende a x_0 , ou $x \neq x_0$. Se x tende para x_0 , para valores imediatamente inferiores a x_0 , dizemos que temos um limite à esquerda da função. Se x tende para x_0 , para valores imediatamente superiores a x_0 , dizemos que temos um limite à direita da função. Pode-se demonstrar que se esses limites à direita e à esquerda forem iguais, então este será o limite da função quando $x \rightarrow x_0$.

Propriedades operatórias dos limites

P1 – O limite de uma soma de funções, é igual à soma dos limites de cada função : $\lim (u + v + w + \dots) = \lim u + \lim v + \lim w + \dots$

P2 – O limite de um produto é igual ao produto dos limites. $\lim (u \cdot v) = \lim u \cdot \lim v$

P3 – O limite de um quociente de funções, é igual ao quociente dos limites. $\lim (u / v) = \lim u / \lim v$, se $\lim v \neq 0$.

P4 – Sendo k uma constante e f uma função, $\lim k \cdot f = k \cdot \lim f$

-

Observações: No cálculo de limites, serão consideradas as igualdades simbólicas, a seguir, envolvendo os símbolos de mais infinito ($+\infty$) e menos infinito ($-\infty$), que representam quantidades de módulo infinitamente grande. É conveniente salientar que, o infinitamente grande, não é um número mas sim, uma tendência de uma variável, ou seja: a variável aumenta ou diminui, sem limite. Na realidade, os símbolos $+\infty$ e $-\infty$, não representam números reais, não podendo ser aplicadas a eles, portanto, as técnicas usuais de cálculo algébrico. Dado $b \in \mathbb{R}$ - conjunto dos números reais, teremos as seguintes igualdades simbólicas:

$$b + (+\infty) = +\infty$$

$$b + (-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$(+\infty) + (-\infty) =$ nada se pode afirmar inicialmente. O símbolo $\infty - \infty$, é dito um símbolo de indeterminação.

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$(+\infty) \cdot 0 =$ nada se pode afirmar inicialmente. É uma indeterminação.

$\infty / \infty =$ nada se pode afirmar inicialmente. É uma indeterminação.

No cálculo de limites de funções, é muito comum chegarmos a expressões indeterminadas, o que significa que, para encontrarmos o valor do limite, teremos que levantar a indeterminação, usando as técnicas algébricas. Os principais símbolos de indeterminação, são:

$$\infty - \infty$$

$$\infty \cdot 0$$

$$\infty / \infty$$

$$\infty^0$$

$$1^\infty$$

Vamos agora calcular alguns limites imediatos, de forma a facilitar o entendimento dos exercícios mais complexos que virão em seguida:

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} (2x + 3) = 2 \cdot 5 + 3 = 13$$

$$x \rightarrow 5$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) = (+\infty)^2 + (+\infty) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} (4 + x^3) = 4 + 2^3 = 4 + 8 = 12$$

$$x \rightarrow 2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 4} [(3x + 3) / (2x - 5)] = [(3 \cdot 4 + 3) / (2 \cdot 4 - 5)] = 5$$

$$x \rightarrow 4$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 4} [(x + 3)(x - 3)] = (4 + 3)(4 - 3) = 7 \cdot 1 = 7$$

$$x \rightarrow 4$$

Limites fundamentais

A técnica de cálculo de limites, consiste na maioria das vezes, em conduzir a questão até que se possa aplicar os limites fundamentais, facilitando assim, as soluções procuradas. Apresentaremos a seguir, sem demonstrar, cinco limites fundamentais e estratégicos, para a solução de problemas.

Primeiro limite fundamental: O limite trigonométrico

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Intuitivamente isto pode ser percebido da seguinte forma: seja x um arco em radianos, cuja medida seja próxima de zero, digamos $x = 0,0001$ rad. Nestas condições, o valor de $\sin x$ será igual a $\sin 0,0001 = 0,00009999$ (obtido numa calculadora científica).

Efectuando-se o quociente, vem: $\sin x / x = 0,00009999 / 0,0001 = 0,99999 \gg 1$.

Quanto mais próximo de zero for o arco x , mais o quociente $(\sin x) / x$ se aproximará da unidade, caracterizando-se aí, a noção intuitiva de limite de uma função.

Exercício:

Observe o cálculo do limite abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \sin 5x}{5x} = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 5 \cdot 1 = 5$$

Observe que fizemos acima, uma mudança de variável, colocando $5x = u$, de modo a cairmos num limite fundamental. Verifique também que ao multiplicarmos numerador e denominador da função dada por 5, a expressão não se altera. Usamos também a propriedade P4 vista no início do texto.

Segundo limite fundamental: Limite exponencial

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Onde e é a base do sistema de logaritmos neperianos, cujo valor aproximado é $e = 2,7182818$.

Exercício:

Observe o cálculo do limite abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \cdot e = e^2$$

Terceiro limite fundamental: Consequência do anterior

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e$$

Exercício:

Observe o cálculo do limite abaixo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{5/x} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1+x)^{1/x}]^5 = e^5$$

Quarto limite fundamental: outro limite exponencial

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

para $a > 0$.

Quinto limite fundamental

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

Exercícios propostos:

Determine os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (2 \operatorname{sen} x - \cos 2x + \operatorname{cotg} x)$$

$$x \rightarrow \pi/2$$

Resp: 3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - 1/x + 3/x^2)$$

$$x \rightarrow +\infty$$

Resp: 5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 - 2x^2 + 1) / (3x^3 - 5)$$

$$x \rightarrow +\infty$$

Resp: 4/3

Sugestão: divida numerador e denominador por x^3 .

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x / \operatorname{tg} x)$$

$$x \rightarrow 0$$

Resp: 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} 4x) / x$$

$$x \rightarrow 0$$

Resp: 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(1 + 1/x)^{x+3}]$$

$$x \rightarrow +\infty$$

Resp: e

Limites de Funções (Exercícios)

Calcular o limite seguinte:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$$

Solução:

Observe que substituindo x por 4, obteremos a indeterminação $0/0$. Temos que “levantar” esta indeterminação, usando certos critérios algébricos.

Multipliquemos numerador e denominador pelos factores racionalizantes do denominador e do numerador.

Teremos então:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{[(2x+1)-9](\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-2-2)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

Simplificando, obteremos:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

Observando que $(2x-8)/(x-4) = 2(x-4)/(x-4) = 2$, para $x \neq 4$, vem:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2x+1}+3)} = \frac{2(\sqrt{4-2}+\sqrt{2})}{\sqrt{2\cdot 4+1}+3} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Comentários adicionais:

1 – Lembre que o factor racionalizante de $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ é $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

2 – $0/0$ é um símbolo de indeterminação; neste problema, obtemos o valor $2\sqrt{2}/3$ para o limite da função dada; outros problemas levarão a outros valores, daí, a designação de indeterminação

O problema proposto a seguir, é um exemplo disto.

Calcule o seguinte limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 4}{\sqrt{x^2 + 25} - 5}$$

Nota: observe que substituindo x por zero (conforme indicado no limite), obteremos a indeterminação 0/0.

Resposta: $5/4 = 1,25$.

Enviar comentários para: [Sérgio Duarte da Silva](#)