

Álgebra Linear - Exercícios
(Espaços Vectoriais)

Índice

1	Espaços Vectoriais	3
1.1	Dependência e Independência Linear	3
1.2	Sistemas de Geradores e Bases	10
1.3	Subespaços Vectoriais	17
1.4	Miscelânea	29

1 Espaços Vectoriais

1.1 Dependência e Independência Linear

Exercício 1 *Sejam u e v dois vectores linearmente independentes de um espaço vectorial real E . Determine o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ para o qual os vectores $\alpha u + 2v$ e $u - v$ são linearmente dependentes.*

Solução

Os vectores serão linearmente independentes se a única combinação linear nula destes se obtiver com os escalares nulos:

$$\begin{aligned}\beta_1(\alpha u + 2v) + \beta_2(u - v) = 0 &\implies \\ \implies (\beta_1\alpha + \beta_2)u + (2\beta_1 - \beta_2)v = 0\end{aligned}$$

Dado que u e v são linearmente independentes da expressão anterior resulta que:

$$\begin{cases} \beta_1\alpha + \beta_2 = 0 \\ 2\beta_1 - \beta_2 = 0 \end{cases}$$

Temos portanto um sistema homogéneo de duas equações a duas incógnitas, β_1 e β_2 , cuja matriz do sistema é dada por $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Se o sistema for determinado, a única solução será $\beta_1 = \beta_2 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes. Pretende-se portanto que o sistema seja indeterminado, isto é $r_A < 2$.

Construímos a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característica:

$$\begin{aligned}[A|B] &= \left[\begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \\ &\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + \left(-\frac{\alpha}{2}\right)L_1} \\ &\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha+2}{2} & 0 \end{array} \right]\end{aligned}$$

Tem-se claramente $r_A = r_{A|B}$, o que significa que o sistema é possível (como já sabíamos por ser um sistema homogéneo). Se $\alpha \neq -2$ tem-se $r_A = 2$ o que implica um sistema possível e determinado; se $\alpha = -2$, tem-se $r_A = 1 < 2$ pelo que teremos um sistema possível e indeterminado. O escalar escolhido deverá portanto ser $\alpha = -2$.

Exercício 2 *Sejam \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} três vectores linearmente independentes de um espaço vectorial real \mathbf{E} . Determine o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ para o qual os vectores $\alpha\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$ e $\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} - \mathbf{w}$ são linearmente dependentes.*

Solução

Os vectores serão linearmente independentes se a única combinação linear nula destes se obtiver com os escalares nulos:

$$\begin{aligned} \beta_1(\alpha\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + 2\mathbf{w}) + \beta_2(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} - \mathbf{w}) = 0 &\implies \\ \implies (\beta_1\alpha + \beta_2)\mathbf{u} + (2\beta_1 + \beta_2\alpha)\mathbf{v} + (2\beta_1 - \beta_2)\mathbf{w} = 0 \end{aligned}$$

Dado que u , v e w são linearmente independentes, da expressão anterior resulta que:

$$\begin{cases} \beta_1\alpha + \beta_2 = 0 \\ 2\beta_1 + \beta_2\alpha = 0 \\ 2\beta_1 - \beta_2 = 0 \end{cases}$$

Temos portanto um sistema homogéneo de três equações a duas incógnitas, β_1 , β_2 e β_3 , cuja matriz do sistema é dada por $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & \alpha \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Se o sistema for determinado, a única solução será $\beta_1 = \beta_2 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes. Pretende-se portanto que o sistema seja indeterminado, isto é $r_A < 2$.

Construímos a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característica:

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[\begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \\ &\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (-1)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-\frac{\alpha}{2})L_1 \end{array}} \\ &\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha + 1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha+2}{2} & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Se $\alpha = -1$ ou $\alpha = -2$ tem-se claramente $r_A = r_{A|B} = 2$, o que significa que o sistema é possível (como já sabíamos por ser um sistema homogéneo) e determinado. No entanto, se $\alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq -2$ também se obterá um sistema possível e determinado. Concluimos assim que os vectores dados serão sempre linearmente independentes, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercício 3 *Sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} dois vectores linearmente independentes de um espaço vectorial real \mathbf{E} . Mostre que os vectores \mathbf{u} e $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ são linearmente independentes.*

Solução

Construamos a combinação linear nula destes dois vectores e verifiquemos que só é satisfeita com os escalares nulos:

$$\begin{aligned}\beta_1(u) + \beta_2(u + v) = 0 &\implies \\ \implies (\beta_1 + \beta_2)u + \beta_2v = 0\end{aligned}$$

Sabendo que u e v são linearmente independentes, teremos:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema é claramente $\beta_1 = \beta_2 = 0$ pelo que se pode concluir que os vectores u e $u + v$ são linearmente independentes.

Exercício 4 *Considerem-se 3 vectores de um espaço vectorial: \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} . Prove que $u - v$, $v - w$ e $w - u$ são sempre linearmente dependentes.*

Solução

Construamos a combinação linear nula destes três vectores e verifiquemos que não é só satisfeita com os escalares nulos:

$$\begin{aligned}\beta_1(u - v) + \beta_2(v - w) + \beta_3(w - u) = 0 &\implies \\ \implies (\beta_1 - \beta_3)u + (-\beta_1 + \beta_2)v + (-\beta_2 + \beta_3)w = 0\end{aligned}$$

Sabendo que u, v e w são linearmente independentes, teremos:

$$\begin{cases} \beta_1 - \beta_3 = 0 \\ -\beta_1 + \beta_2 = 0 \\ -\beta_2 + \beta_3 = 0 \end{cases}$$

Construímos agora a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característica:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Dado que $r_A = r_{A|B} = 2 < 3$, o sistema é possível e indeterminado, tendo outras soluções que não a solução $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente dependentes.

Exercício 5 Sendo \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} vectores linearmente independentes de um espaço vectorial \mathbf{E} , mostre que os três vectores $x + y$, $x + z$ e $y + z$ também são linearmente independentes

Solução

Construamos a combinação linear nula destes três vectores e verifiquemos que não é só satisfeita com os escalares nulos:

$$\begin{aligned} \beta_1(x + y) + \beta_2(x + z) + \beta_3(y + z) = \mathbf{0} &\implies \\ \implies (\beta_1 + \beta_2)x + (\beta_1 + \beta_3)y + (\beta_2 + \beta_3)z = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Sabendo que x , y e z são linearmente independentes, teremos:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \beta_1 + \beta_3 = 0 \\ \beta_2 + \beta_3 = 0 \end{cases}$$

Construímos agora a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característica:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + (-1)L_1}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Dado que $r_A = r_{A|B} = 2 = 3$, o sistema é possível e determinado, tendo apenas a solução $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes.

Exercício 6 *Sejam \mathbf{v} e \mathbf{w} dois vectores linearmente independentes de um espaço vectorial \mathbf{E} . Mostre que o sistema de vectores $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\}$ é linearmente dependente.*

Solução

Construamos a combinação linear nula destes três vectores e verifiquemos que não é só satisfeita com os escalares nulos:

$$\begin{aligned}\beta_1 \mathbf{v} + \beta_2 \mathbf{w} + \beta_3 (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = 0 &\implies \\ \implies (\beta_1 + \beta_3) \mathbf{v} + (\beta_2 + \beta_3) \mathbf{w} = 0\end{aligned}$$

Sabendo que \mathbf{v} e \mathbf{w} são linearmente independentes, teremos:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_3 = 0 \\ \beta_2 + \beta_3 = 0 \end{cases}$$

Construímos agora a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característica:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Dado que $r_A = r_{A|B} = 2 < 3$, o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $d = n - r_A = 3 - 2 = 1$. Existem portanto outras soluções para o sistema que não a solução $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. Logo, os vectores $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\}$ são linearmente dependentes.

Exercício 7 *Identifique as condições sobre \mathbf{a} e \mathbf{b} de modo a que os vectores, $(a, 2, b)$, $(a + 1, 2, 1)$ e $(3, b, 1)$ sejam linearmente independentes.*

Solução

Os vectores serão linearmente independentes se a única combinação linear nula destes se obtiver com os escalares nulos:

$$\begin{aligned}\beta_1 (a, 2, b) + \beta_2 (a + 1, 2, 1) + \beta_3 (3, b, 1) = 0 &\implies \\ \implies (a\beta_1 + (a + 1)\beta_2 + 3\beta_3, 2\beta_1 + 2\beta_2 + b\beta_3, b\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 0\end{aligned}$$

Da expressão anterior resulta que:

$$\begin{cases} a\beta_1 + (a+1)\beta_2 + 3\beta_3 = 0 \\ 2\beta_1 + 2\beta_2 + b\beta_3 = 0 \\ b\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \end{cases}$$

Temos portanto um sistema homogéneo de três equações a três incógnitas, β_1 , β_2 e β_3 , cuja matriz do sistema é dada por $A = \begin{bmatrix} a & a+1 & 3 \\ 2 & 2 & b \\ b & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Se o sistema for determinado (possível é sempre, por ser homogéneo), a única solução será $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes. Pretende-se portanto que o sistema seja determinado, isto é $r_A = 3$. Tal depende no entanto dos valores dos parâmetros a e b .

Construímos a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característica:

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} a & a+1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & b & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & b & 0 \\ a & a+1 & 3 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_1} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ a & a+1 & 3 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (-a)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-b)L_1 \end{array}} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6-ab}{2} & 0 \\ 0 & 1-b & \frac{2-b^2}{2} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (b-1)L_2} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6-ab}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2-b^2}{2} + (b-1)\frac{6-ab}{2} & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Para que, como se pretende, $r_A = r_{A|B} = 3$, é necessário que $\frac{2-b^2}{2} + (b-1)\frac{6-ab}{2} \neq 0$. Vejamos então qual a relação entre a e b de modo a que esta condição seja satisfeita. Note-se que $\frac{2-b^2}{2} + (b-1)\frac{6-ab}{2} = 0$ é uma equação na variável a . É simples verificar que $a = \frac{-4-b^2+6b}{(b-1)b}$. Assim, concluímos que:

- $b = 0 \vee b = 1$

Não existe solução para a , logo $r_A = r_{A|B} = 3$, o sistema é possível e determinado e, por consequência os três vectores dados são linearmente independentes.

- $b \neq 0 \wedge b \neq 1$

→ Se $a = \frac{-4-b^2+6b}{(b-1)b}$, teremos $r_A = r_{A|B} < 3$, o sistema é possível e indeterminado e, por consequência os três vectores dados são linearmente dependentes.

→ Se $a \neq \frac{-4-b^2+6b}{(b-1)b}$, teremos $r_A = r_{A|B} = 3$, o sistema é possível e determinado e, por consequência os três vectores dados são linearmente independentes.

Exercício 8 *Verifique se os seguintes vectores de \mathbb{R}^4 são linearmente independentes?*

$$x_1 = (1, 0, 1, 2); x_2 = (0, 1, 1, 2); x_3 = (1, 1, 1, 3)$$

Solução

Os vectores serão linearmente independentes se a única combinação linear nula destes se obtiver com os escalares nulos:

$$\begin{aligned} \beta x_1 + \beta x_2 + \beta x_3 = 0 &\implies \\ \implies \beta_1 (1, 0, 1, 2) + \beta_2 (0, 1, 1, 2) + \beta_3 (1, 1, 1, 3) = 0 &\implies \\ \implies (\beta_1 + \beta_3, \beta_2 + \beta_3, \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, 2\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3) = 0 \end{aligned}$$

Da expressão anterior resulta que:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_3 = 0 \\ \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ 2\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 = 0 \end{cases}$$

Temos portanto um sistema homogéneo de quatro equações a quatro incógnitas, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ e β_4 , cuja matriz do sistema é dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Se o sistema for determinado (possível é sempre, por ser homogéneo), a única solução será $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes. Pretende-se portanto que o sistema seja determinado, isto é $r_A = 3$. Tal depende no entanto dos valores dos parâmetros a e b .

Construímos a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característica:

$$\begin{aligned}
 [A|B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} a & a+1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & b & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \end{array} \\
 &= \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & b & 0 \\ a & a+1 & 3 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_1 \\ \\ \end{array} \\
 &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ a & a+1 & 3 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (-a)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-b)L_1 \\ \\ \end{array} \\
 &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6-ab}{2} & 0 \\ 0 & 1-b & \frac{2-b^2}{2} & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + (b-1)L_2 \\ \\ \end{array} \\
 &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6-ab}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2-b^2}{2} + (b-1)\frac{6-ab}{2} & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Para que, como se pretende, $r_A = r_{A|B} = 3$, é necessário que $\frac{2-b^2}{2} + (b-1)\frac{6-ab}{2} \neq 0$. Vejamos então qual a relação entre a e b de modo a que esta condição seja satisfeita. Note-se que $\frac{2-b^2}{2} + (b-1)\frac{6-ab}{2} = 0$ é uma equação na variável a . É simples verificar que $a = \frac{-4-b^2+6b}{(b-1)b}$. Assim, concluímos que:

1.2 Sistemas de Geradores e Bases

Exercício 9 Considere os vectores:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= (1, 1, a); \quad u_2 = (0, 1, 1); \quad u_3 = (1, 0, b) \\
 \text{com } u_i &\in \mathbb{R}^3, i = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Que condições devem verificar \mathbf{a} e \mathbf{b} para $\{u_1, u_2, u_3\}$ constituírem uma base de \mathbb{R}^3 .

Solução

Sabemos que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Como o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é constituído por três vectores de \mathbb{R}^3 sabemos que $\{u_1, u_2, u_3\}$ serão geradores de \mathbb{R}^3 se constituírem uma base de \mathbb{R}^3 . Mas $\{u_1, u_2, u_3\}$ só constituirá uma base de \mathbb{R}^3 se os seus vectores forem linearmente independentes. Os vectores de $\{u_1, u_2, u_3\}$ serão linearmente independentes se a única combinação linear nula destes se obtiver com os escalares nulos:

$$\begin{aligned}\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 = 0 &\implies \\ \implies \beta_1 (1, 1, a) + \beta_2 (0, 1, 1) + \beta_3 (1, 0, b) = 0 &\implies \\ \implies (\beta_1 + \beta_3, \beta_1 + \beta_2, \beta_1 a + \beta_2 + \beta_3 b) = 0 &\end{aligned}$$

Da expressão anterior resulta que:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_3 = 0 \\ \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ a\beta_1 + \beta_2 + b\beta_3 = 0 \end{cases}$$

Temos portanto um sistema homogêneo de três equações a três incógnitas, β_1 , β_2 e β_3 , cuja matriz do sistema é dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & b \end{bmatrix}$. Se o sistema for determinado (possível é sempre, por ser homogêneo), a única solução será $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes e portanto uma base de \mathbb{R}^3 , como pretendemos. Tal depende no entanto do valor dos parâmetros a e b .

Construamos a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característica:

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & b & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (-1)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-a)L_1 \end{array} \\ &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & b-a & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + (-1)L_2 \end{array} \\ &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b-a+1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Para que, como se pretende, $r_A = r_{A|B} = 3$, é necessário que $b - a + 1 \neq 0$, o que implica $b \neq a - 1$. Nestas circunstâncias, o sistema é possível e determinado e os vectores dados são linearmente dependentes, constituindo uma base de \mathbb{R}^3 .

Exercício 10 *Sejam $v_1 = (7, 4, -7)$ e $v_2 = (8, 7, 8)$ dois vectores de \mathbb{R}^3 . Determine o valor de t de modo a que o vector $v = (-2, t, 8)$ pertença ao subespaço de \mathbb{R}^3 gerado por v_1 e v_2 .*

Solução

O subespaço gerado pelos vectores v_1 e v_2 são os vectores da forma: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Assim, o vector v pertencerá ao subespaço gerado por v_1 e v_2 se existirem escalares α_1 e α_2 tais que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = v$.

$$\begin{aligned}\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 &= v \iff \\ \iff \alpha_1 (7, 4, -7) + \alpha_2 (8, 7, 8) &= (-2, t, 8) \iff \\ \iff \begin{cases} 7\alpha_1 + 8\alpha_2 = -2 \\ 4\alpha_1 + 7\alpha_2 = t \\ -7\alpha_1 + 8\alpha_2 = 8 \end{cases}\end{aligned}$$

Vejam os quais as condições para que o sistema seja possível. Para isso, estudamos o sistema através da sua matriz ampliada:

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{cc|c} 7 & 8 & -2 \\ 4 & 7 & t \\ -7 & 8 & 8 \end{array} \right] & \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (-\frac{4}{7})L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 7 & 8 & -2 \\ 0 & \frac{17}{7} & \frac{8+7t}{7} \\ 0 & 16 & 6 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{7}{17}L_2} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 7 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 136 + 119t \\ 0 & 16 & 6 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (-16)L_2} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 7 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 136 + 119t \\ 0 & 0 & -2170 - 1904t \end{array} \right]\end{aligned}$$

O sistema será possível se $-2170 - 1904t = 0$. Logo, v poderá ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2 se $t = -\frac{155}{136}$.

Exercício 11 Verifique se o conjunto de vectores $\{(6, 3, 9), (5, 2, 8), (4, 1, 7)\}$ constitui uma base de \mathbb{R}^3 .

Solução

Exercício 12 Seja $v = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$.

- Dê um exemplo de um vector, diferente de \mathbf{v} e do vector nulo, que pertença ao subespaço gerado por \mathbf{v} .
- Dê um exemplo de um vector que não pertença ao subespaço gerado por \mathbf{v} .

Solução

a) O subespaço gerado por v é dado por:

$$\{w \in \mathbb{R}^2 : w = \alpha \cdot v, \forall \alpha \in \mathbb{R}^2\}$$

O subespaço gerado por v são portanto todos os "múltiplos" do vector v . Escolhendo $\alpha = -1$, obtém-se $w = (-1)v = (-1)(1, 2) = (-1, -2)$. conclui-se portanto que $(-1, -2)$ pertence ao subespaço gerado por v .

b) Em contraponto com a) serão todos os vectores que não sejam múltiplos de v , por exemplo $(1, 1)$. Podemos confirmar este resultado, mostrando que a equação $(1, 1) = \alpha(1, 2)$ é impossível:

$$\begin{aligned}\alpha(1, 2) = (1, 1) &\iff \\ \iff (\alpha, 2\alpha) = (1, 1)\end{aligned}$$

Esta expressão é equivalente, matricialmente, ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O sistema é obviamente impossível. Estudemos a sua matriz ampliada:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_1} \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right]$$

Dado que $r_A \neq r_{A|B}$ o sistema é impossível, pelo que não existe nenhum escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ que satisfaça $(1, 1) = \alpha(1, 2)$. Logo, $(1, 1)$ não pertence ao subespaço gerado por $(1, 2)$.

Exercício 13 Considere o espaço vectorial \mathbb{R}^3 e o conjunto de vectores $M = \{(4, 5, 6), (r, 5, 1), (4, 3, 2)\}$. Determine r de modo a que o conjunto gerado pelos vectores de M não seja \mathbb{R}^3 .

Solução

Sabemos que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Como o conjunto M é constituído por três vectores de \mathbb{R}^3 sabemos que M serão geradores de \mathbb{R}^3 se constituírem uma base de \mathbb{R}^3 . Mas M só constituirá uma base de \mathbb{R}^3 se os seus vectores forem

linearmente independentes. Os vectores de M serão linearmente independentes se a única combinação linear nula destes se obtiver com os escalares nulos:

$$\begin{aligned} \beta_1 (4, 5, 6) + \beta_2 (r, 5, 1) + \beta_3 (4, 3, 2) = 0 &\implies \\ \implies (4\beta_1 + r\beta_2 + 4\beta_3, 5\beta_1 + 5\beta_2 + 3\beta_3, 6\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3) = 0 \end{aligned}$$

Da expressão anterior resulta que:

$$\begin{cases} 4\beta_1 + r\beta_2 + 4\beta_3 = 0 \\ 5\beta_1 + 5\beta_2 + 3\beta_3 = 0 \\ 6\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 = 0 \end{cases}$$

Temos portanto um sistema homogéneo de três equações a três incógnitas, β_1, β_2 e β_3 , cuja matriz do sistema é dada por $A = \begin{bmatrix} 4 & r & 4 \\ 5 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Se o sistema for determinado (possível é sempre, por ser homogéneo), a única solução será $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes e portanto uma base de \mathbb{R}^3 , o que contraria o que nós pretendemos. Pretende-se portanto que o sistema seja indeterminado, isto é $r_A < 3$. Tal depende no entanto do valor do parâmetro r .

Construamos a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característica:

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & r & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{r}{4} & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (-5)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-6)L_1 \end{array}} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{r}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{20-r}{4} & -2 & 0 \\ 0 & \frac{24-r}{4} & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{4}{20-r}L_2} \end{aligned}$$

Para prosseguir a condensação temos de assumir que $r \neq 20$. Adiante estudaremos o caso em que $r = 20$.

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{r}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{20-r} & 0 \\ 0 & \frac{24-r}{4} & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \left(-\frac{24-r}{4}\right)L_2} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{r}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{20-r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2r-32}{20-r} & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Para que, como se pretende, $r_A = r_{A|B} < 3$, é necessário que $\frac{2r-32}{20-r} = 0$, o que implica $r = 16$. Nestas circunstâncias, o sistema é possível e indeterminado e os vectores dados são linearmente dependentes.

regressemos agora ao caso em que $r = 20$. Substituindo r na matriz após as três primeiras operações elementares obtém-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{20}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{20-20}{4} & -2 & 0 \\ 0 & \frac{24-20}{4} & -4 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right]$$

Prosseguindo a condensação, obter-se-á:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

Tem-se, claramente, $r_A = r_{A|B} = 3$ pelo que o sistema é possível e determinado. consequentemente, os vectores dados serão linearmente independentes. O valor do parâmetro r que nos interessa é portanto $r = 16$.

Exercício 14 O conjunto, $P_2(\mathbb{R})$, dos polinómios de grau inferior ou igual a 2 constitui um espaço vectorial real.

- Determine um polinómio $b(x)$ de modo a que o conjunto $\{1, 1+x^2, b(x)\}$ constitua uma base de $P_2(\mathbb{R})$.
- Determine as coordenadas de $2x^2 - 7x$ nessa base.

Solução

- O polinómio $b(x)$ deverá ser tal que o sistema de vectores $\{1, 1+x^2, b(x)\}$ seja linearmente independente. Construamos a combinação linear nula destes três vectores e verifiquemos para que polinómios $b(x) = ax^2 + bx + c$ a equação é satisfeita apenas com os escalares nulos:

$$\begin{aligned} \beta_1 \cdot 1 + \beta_2 \cdot (1+x^2) + \beta_3 \cdot b(x) &= 0 \implies \\ \implies \beta_1 \cdot 1 + \beta_2 \cdot (1+x^2) + \beta_3 \cdot (ax^2 + bx + c) &= 0 \implies \\ \implies (\beta_1 + \beta_2 + c\beta_3) + (b\beta_3) \cdot x + (\beta_2 + a\beta_3) \cdot x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Sabendo que um polinómio é nulo se os coeficientes dos termos de todos os graus forem nulos, teremos:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + c\beta_3 = 0 \\ b\beta_3 = 0 \\ \beta_2 + a\beta_3 = 0 \end{cases}$$

Temos portanto um sistema homogéneo de três equações a três incógnitas,

β_1 , β_2 e β_3 , cuja matriz do sistema é dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$. Se o

sistema for determinado (possível é sempre, por ser homogéneo), a única solução será $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes e portanto uma base de $P_2(\mathbb{R})$, como se pretende. Tal depende no entanto do valor dos parâmetros a , b e c .

Construamos a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característica:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array} \right]$$

Para que, como se pretende, $r_A = r_{A|B} = 3$, é necessário que $b \neq 0$. Nestas circunstâncias, o sistema é possível e indeterminado, os vectores dados são linearmente dependentes e portanto constituirão uma base de $P_2(\mathbb{R})$.

Escolhemos a alternativa mais simples e escolhamos $a = c = 0$ e $b = 1$. Neste caso $b(x) = x$. O conjunto de vectores $\{1, 1 + x^2, x\}$ será portanto uma base de $P_2(\mathbb{R})$.

b) Pretende-se determinar os escalares β_1 , β_2 e β_3 tais que:

$$\begin{aligned} \beta_1 \cdot 1 + \beta_2 \cdot (1 + x^2) + \beta_3 \cdot x &= 2x^2 - 7x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \beta_2 \cdot x^2 + \beta_3 \cdot x + (\beta_1 + \beta_2) &= 2x^2 - 7x \end{aligned}$$

Sabendo que dois polinómios são iguais se os coeficientes dos termos do mesmo grau são iguais, a igualdade acima é equivalente ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \beta_2 = 2 \\ \beta_3 = -7 \\ \beta_1 + \beta_2 = 0 \end{cases}$$

Facilmente se verifica que a solução será dada por $\beta_1 = -2$, $\beta_2 = 2$ e $\beta_3 = -7$. Assim, as coordenadas de $2x^2 - 7x$ na base $\{1, 1 + x^2, x\}$ serão $[-2 \ 2 \ -7]^T$.

Exercício 15 *Mostre que o conjunto $M = \{(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5)\}$ não é uma base de \mathbb{R}^3 .*

Solução

Temos duas alternativas para mostrar este facto:

1ª alternativa:

Notemos que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Se os vectores dados não forem linearmente independentes, então não podem constituir uma base de \mathbb{R}^3 uma vez que esta deverá ter 3 elementos.

2ª alternativa:

Podemos verificar se os vectores de M geram qualquer vector $x \in \mathbb{R}^3$. Se tal não for verdade, então os vectores não podem constituir uma base de \mathbb{R}^3 .

Exercício 16 *Verifique se os seguintes vectores são geradores do espaço vectorial \mathbb{R}^3 .*

a) $x_1 = (1, 1, 1); x_2 = (1, -1, -1); x_3 = (3, 1, 1)$

b) $x_1 = (1, 1, 1); x_2 = (1, -1, -1); x_3 = (3, 1, 2)$

Solução

1.3 Subespaços Vectoriais

Exercício 17 *Quais dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^2 são subespaços de \mathbb{R}^2 ?*

i) $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}$

ii) $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y, 2x = y\}$

iii) $W_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y + 1\}$

iv) $W_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$

Solução

- i) Vejamos se $0 \in W_1$. Se $x = 0$ e $y = 0$, teremos $x = 2y$ pelo que $(0, 0) \in W_1$. Com efeito, $0 = x \cdot 0$. Consideremos agora dois vectores $(x, y), (x', y') \in W_1$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha(x, y) + \beta(x', y') \in W_1$. Faça-se $(a, b) = \alpha(x, y) + \beta(x', y')$. Queremos mostrar que (a, b) satisfaz $a = 2b$:

$$\begin{aligned}(a, b) &= \alpha(x, y) + \beta(x', y') \\ (\text{Porque } (x, y), (x', y') &\in W_1) \\ &= (2\alpha y + 2\beta y', \alpha y + \beta y') \\ &= (2(\alpha y + \beta y'), \alpha y + \beta y')\end{aligned}$$

Concluimos assim que (a, b) satisfaz $a = 2b$, logo, F_2 é um espaço vectorial.

- ii) O sistema $x = 2y \wedge 2x = y$ tem como solução única o vector nulo, $(0, 0)$. Assim, como $W_2 = \{(0, 0)\}$ conclui-se que W_2 é um subespaço.
- iii) Vejamos se $0 \in W_3$. É fácil verificar que não: um vector de W_3 tem a forma $(2y + 1, y), y \in \mathbb{R}$. Este vector poderá ser escrito como:

$$(2y + 1, y) = y(2, 1) + (1, 0), y \in \mathbb{R}$$

Vejmos agora se existe algum escalar α tal que $(2\alpha + 1, \alpha) = 0$:

$$\begin{aligned}(2\alpha + 1, \alpha) = 0 &\iff \\ \iff \alpha(2, 1) + (1, 0) = (0, 0) &\iff \\ \iff \alpha(2, 1) = (-1, 0) &\iff \\ \begin{cases} 2\alpha = -1 \\ \alpha = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Este sistema é impossível pelo que $0 \notin W_3$. Portanto, W_3 não constitui um subespaço vectorial.

- iv) O conjunto W_4 é constituído pelos vectores da forma $(x, 0), x \in \mathbb{R}$ e $(0, y), y \in \mathbb{R}$. É obvio que os vectores $(1, 0)$ e $(0, 1)$ pertencem ao subespaço vectorial W_4 , mas a sua soma, $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$, não. Dado que W_4 não é fechado para a soma, então não pode ser espaço vectorial.

Exercício 18 *Seja \mathbf{F} o espaço vectorial real das funções reais de variável real, diferenciáveis. Determine, entre os seguintes conjuntos, aqueles que são subespaços de \mathbf{F} .*

- i) $F_1 = \left\{ f \in F : f(x) \cdot f'(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R} \right\}$
- ii) $F_2 = \left\{ f \in F : f(x) = x \cdot f'(x), \forall x \in \mathbb{R} \right\}$

Solução

- i) Vejamos se $0 \in F_1$. Obviamente que não: se $f(x) = 0$ teremos $f'(x) = 0$, pelo que $f(x) \cdot f'(x) = 0 \neq 1$. Logo, $0 \notin F_1$, portanto F_1 não é subespaço.
- ii) Vejamos se $0 \in F_2$. Se $f(x) = 0$ teremos $f'(x) = 0$, pelo que $f(x) = x \cdot f'(x)$ é satisfeita. Com efeito, $0 = x \cdot 0$. Consideremos agora duas funções $f(x), g(x) \in F_2$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha f(x) + \beta g(x) \in F_2$. Faça-se $p(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$. Queremos mostrar que $p(x)$ se pode escrever na forma $x \cdot p'(x)$:

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha f(x) + \beta g(x) \\ &\quad (\text{Porque } f(x), g(x) \in F_2) \\ &= \alpha x \cdot f'(x) + \beta x \cdot g'(x) \\ &= x \left(\alpha f'(x) + \beta g'(x) \right) \\ &= x \cdot p'(x) \end{aligned}$$

Concluimos assim que F_2 é um espaço vectorial.

Exercício 19 Considere o espaço vectorial \mathcal{S} , sobre \mathbb{R} , das sucessões reais. Determine, entre os seguintes subconjuntos, aqueles que são subespaços de \mathcal{S} :

- i) O conjunto das progressões aritméticas, \mathcal{P} .
- ii) O conjunto das sucessões com um número infinito de termos nulos, \mathcal{Q} .

Solução

- i) As progressões aritméticas reais são sucessões reais do tipo $u_n = n \cdot r, r \in \mathbb{R}$. Está claro que se $r = 0$, teremos $u_n = 0$, pelo que $0 \in \mathcal{P}$. Consideremos agora duas progressões $u_n, v_n \in \mathcal{P}$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha u_n + \beta v_n \in \mathcal{P}$. Faça-se $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$. Queremos mostrar que w_n é uma progressão aritmética. Basta para o efeito determinar o seu termo:

$$\begin{aligned}w_n &= \alpha u_n + \beta v_n \\ &\quad (\text{Porque } u_n, v_n \in \mathcal{P}) \\ &= \alpha nr_1 + \beta nr_2 \\ &= n(\alpha r_1 + \beta r_2)\end{aligned}$$

Concluimos assim, que w_n é uma progressão aritmética de termo $(\alpha r_1 + \beta r_2)$.

Exercício 20 *Seja \mathbf{E} o espaço vectorial real das funções reais de variável real contínuas e diferenciáveis em \mathbb{R} , munido das operações habituais de adição de funções e da multiplicação de uma função por um escalar. Seja \mathbf{F} o conjunto das funções:*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < 0 \\ ax^2 + bx + c, & 0 \leq x \leq 1 \\ \gamma x + \delta, & x > 1 \end{cases} \quad (1)$$

Que condições devem verificar as constantes e $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b$ e c para que \mathbf{F} seja um subespaço de \mathbf{E} ?

Solução

- f tem de ser contínua

Apenas nos precisamos de preocupar com os pontos de abcissa $x = 0$ e $x = 1$:

$$\begin{aligned}- x = 0 \\ \alpha \cdot 0 + \beta &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \iff \boxed{\beta = c} \\ - x = 1 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c &= \gamma \cdot 1 + \delta \iff \boxed{a + b + c = \gamma + \delta}\end{aligned}$$

- f tem de ser diferenciável

Apenas nos precisamos de preocupar com os pontos de abcissa $x = 0$ e $x = 1$:

$$\begin{aligned}- \frac{df}{dx} \Big|_{x=0^-} &= \frac{df}{dx} \Big|_{x=0^+} \iff \alpha = 2 \cdot a \cdot x + b \Big|_{x=0^+} \iff \\ &\iff \boxed{\alpha = b} \\ - \frac{df}{dx} \Big|_{x=1^-} &= \frac{df}{dx} \Big|_{x=1^+} \iff 2 \cdot a \cdot x + b \Big|_{x=1^-} = \gamma \iff \\ &\iff \boxed{2a + b = \gamma}\end{aligned}$$

As quatro condições anteriores podem ser colocadas em forma de sistema de 4 equações a 7 incógnitas, a saber:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema por condensação obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \\ & \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \\ & \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + (-1)L_3} \\ & \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_4} \\ & \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Temos $r_A = r_{A|B} = 4 < 7$ pelo que o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $n - r_A = 7 - 4 = 3$.

A solução geral do sistema será dada por:

$$\begin{cases} \alpha = b \\ \beta = c \\ \gamma = 2a + 2b \\ \delta = -a - b + c \end{cases}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Matricialmente, teremos:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ 2a + 2b \\ -a - b + c \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Relativamente às condições para o critério de sunespaço:

- Está claro que $0 \in F$. Basta fazer $a = b = c = 0$, para que $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ e portanto se tenha a função $f(x) = 0$.
- Consideremos agora duas funções $f(x), g(x) \in F$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha f(x) + \beta g(x) \in F$. Faça-se $p(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$. Queremos mostrar que $p(x)$ se pode escrever na forma da equação (1):

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x) + g(x) = \\ &= \begin{cases} bx + c, & x < 0 \\ ax^2 + bx + c, & 0 \leq x \leq 1 \\ (2a + 2b)x + (-a - b + c), & x > 1 \end{cases} + \begin{cases} b'x + c', & x < 0 \\ a'x^2 + b'x + c', & 0 \leq x \leq 1 \\ (2a' + 2b')x + (-a' - b' + c'), & x > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (b + b')x + (c + c'), & x < 0 \\ (a + a')x^2 + (b + b')x + (c + c'), & 0 \leq x \leq 1 \\ (2(a + a') + 2(b + b'))x + (-(a + a') - (b + b') + (c + c')), & x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Fazendo $a'' = (a + a')$, $b'' = (b + b')$ e $c'' = (c + c')$, $p(x)$ escrever-se-á na forma:

$$p(x) = \begin{cases} b''x + c'', & x < 0 \\ a''x^2 + b''x + c'', & 0 \leq x \leq 1 \\ (2a'' + 2b'')x + (-a'' - b'' + c''), & x > 1 \end{cases}$$

Adicionalmente, fazendo,

$$\begin{cases} \alpha'' = b'' \\ \beta = c'' \\ \gamma'' = 2a'' + 2b'' \\ \delta'' = -a'' - b'' + c'' \end{cases}$$

... teremos,

$$p(x) = \begin{cases} \alpha''x + \beta'', & x < 0 \\ a''x^2 + b''x + c'', & 0 \leq x \leq 1 \\ \gamma''x + \delta'', & x > 1 \end{cases}$$

... o que mostra que $p(x) \in F$.

Exercício 21 Seja $M_2(\mathbb{R})$ o espaço vectorial real das matrizes quadradas de ordem 2 da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Verifique se os subconjuntos a seguir indicados são subespaços de $M_2(\mathbb{R})$. No caso afirmativo apresente um conjunto de geradores linearmente independentes.

- i) Conjunto das matrizes quadradas de ordem 2 que verificam $a = b$.
- ii) Conjunto das matrizes quadradas de ordem 2 que verificam $b = c + 1$.

Solução

- i) Seja \mathcal{M} o conjunto dado, cujas matrizes têm a forma genérica $\begin{bmatrix} a & a \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a, c, d \in \mathbb{R}$.

Se $a = c = d = 0$ teremos a matriz nula de ordem, 0_2 . Logo, $0 \in \mathcal{M}$. Sejam agora $A = \begin{bmatrix} a & a \\ c & d \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} a' & a' \\ c' & d' \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha A + \beta A' \in \mathcal{M}$. Faça-se $A'' = \alpha A + \beta A'$.

$$\begin{aligned} A'' &= \alpha A + \beta A' \\ &= \alpha \begin{bmatrix} a & a \\ c & d \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a' & a' \\ c' & d' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha a + \beta a' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + \beta d' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Note-se que, na matriz A'' se tem $a''_{11} = a''_{12}$, o que implica que $A'' \in \mathcal{M}$. Concluimos assim que \mathcal{M} é um subespaço vectorial.

Note-se que:

$$\begin{bmatrix} a & a \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de \mathcal{M} e portanto um conjunto de geradores de \mathcal{M} .

- ii) Seja \mathcal{M} o conjunto dado, cujas matrizes têm a forma genérica $\begin{bmatrix} a & c+1 \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a, c, d \in \mathbb{R}$.
 Note-se que $0 \notin \mathcal{M}$. Efectivamente, o sistema $c = 0 \wedge c+1 = 0$ é impossível.
 Conclui-se assim que \mathcal{M} não é subespaço vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercício 22 Seja $M_n(\mathbb{R})$ o espaço vectorial real das matrizes quadradas de ordem n . Verifique se os subconjuntos a seguir indicados são subespaços de $M_n(\mathbb{R})$. No caso afirmativo apresente uma base e indique a dimensão.

- i) Conjunto das matrizes diagonais.
 ii) Conjunto das matrizes escalares.

Solução

- i) Seja \mathcal{M} o conjunto dado, cujas matrizes têm a forma genérica $diag\{d_1, d_2, \dots, d_n\}, \forall d_i \in \mathbb{R}$.
 Se $d_i = 0$ teremos a matriz nula de ordem, 0_n . Logo, $0 \in \mathcal{M}$. Sejam agora $D = diag\{d_1, d_2, \dots, d_n\}, D' = diag\{d'_1, d'_2, \dots, d'_n\} \in \mathcal{M}$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha D + \beta D' \in \mathcal{M}$. Faça-se $D'' = \alpha D + \beta D'$.

$$\begin{aligned} D'' &= \alpha D + \beta D' \\ &= \alpha \cdot diag\{d_1, d_2, \dots, d_n\} + \beta \cdot diag\{d'_1, d'_2, \dots, d'_n\} \\ &= diag\{\alpha d_1 + \beta d'_1, \alpha d_2 + \beta d'_2, \dots, \alpha d_n + \beta d'_n\} \end{aligned}$$

A matriz D'' é obviamente diagonal, o que implica que $D'' \in \mathcal{M}$. Concluimos assim que \mathcal{M} é um subespaço vectorial.

Note-se que:

$$\begin{aligned} diag\{d_1, d_2, \dots, d_n\} &= \\ &= d_1 \cdot diag\{1, 0, \dots, 0\} + \dots + d_n \cdot diag\{0, 0, \dots, 1\} \end{aligned}$$

Assim, $\{diag\{1, 0, \dots, 0\}, \dots, diag\{0, 0, \dots, 1\}\}$ é uma base de \mathcal{M} . Como é constituída por n vectores, \mathcal{M} tem dimensão n .

- ii) Seja \mathcal{M} o conjunto dado, cujas matrizes têm a forma genérica $diag\{d, d, \dots, d\}, \forall d \in \mathbb{R}$.
 Se $d = 0$ teremos a matriz nula de ordem, 0_n . Logo, $0 \in \mathcal{M}$. Sejam agora $D = diag\{d, d, \dots, d\}, D' = diag\{d', d', \dots, d'\} \in \mathcal{M}$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha D + \beta D' \in \mathcal{M}$. Faça-se $D'' = \alpha D + \beta D'$.

$$\begin{aligned}D'' &= \alpha D + \beta D' \\ &= \alpha \cdot \text{diag}\{d, d, \dots, d\} + \beta \cdot \text{diag}\{d', d', \dots, d'\} \\ &= \text{diag}\{\alpha d + \beta d', \alpha d + \beta d', \dots, \alpha d_n + \beta d'\}\end{aligned}$$

A matriz D'' é obviamente diagonal, o que implica que $D'' \in \mathcal{M}$. Concluimos assim que \mathcal{M} é um subespaço vectorial.

Note-se que:

$$\begin{aligned}\text{diag}\{d, d, \dots, d\} &= \\ &= d \cdot \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}\end{aligned}$$

Assim, a matriz identidade de ordem n é uma base de \mathcal{M} . Como é constituída por 1 vector, \mathcal{M} tem dimensão 1.

Exercício 23 *Seja \mathbf{C} o espaço vectorial real das funções reais de variável real, com derivada contínua no intervalo $[-a, a]$, $a > 0$. Verifique se os seguintes conjuntos são subespaços vectoriais de \mathbf{C} .*

- i) $V_1 = \{f \in \mathbf{C} : f(-x) = f(x), \forall x \in [-a, a]\}$
- ii) $V_2 = \{f \in \mathbf{C} : f(-x) = -f(x), \forall x \in [-a, a]\}$

Solução

- i) Vejamos se $0 \in V_1$. Se $f(x) = 0$ teremos $f(-x) = 0$, pelo que $f(x) = f(-x)$ é satisfeita, logo $0 \in V_1$. Consideremos agora duas funções $f(x), g(x) \in V_1$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha f(x) + \beta g(x) \in F_2$. Faça-se $p(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$. Queremos mostrar que $p(x) = p(-x)$:

$$\begin{aligned}p(x) &= \alpha f(x) + \beta g(x) \\ &\quad (\text{Porque } f(x), g(x) \in F_2) \\ &= \alpha f(-x) + \beta g(-x) \\ &= p(-x)\end{aligned}$$

Concluimos assim que V_1 é um espaço vectorial.

- ii) Vejamos se $0 \in V_2$. Se $f(x) = 0$ teremos $-f(x) = 0$, pelo que $f(x) = 0$. Logo $f(-x) = 0$ é satisfeita, pelo que $0 \in V_2$. Consideremos agora duas funções $f(x), g(x) \in V_2$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha f(x) + \beta g(x) \in V_2$. Faça-se $p(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$. Queremos mostrar que $-p(x) = p(-x)$:

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha f(x) + \beta g(x) \\ &\quad (\text{Porque } f(x), g(x) \in V_2) \\ &= \alpha [-f(-x)] + \beta [-g(-x)] \\ &= -\alpha f(-x) - \beta g(-x) \\ &= -(\alpha f(-x) + \beta g(-x)) \\ &= -p(-x) \end{aligned}$$

Logo, $p(x) = -p(-x)$, pelo que $p(-x) = -p(x)$. Concluímos assim que V_2 é um espaço vectorial.

Exercício 24 *Seja (a_1, a_2, \dots, a_n) um vector fixo do espaço vectorial \mathbb{R}^n . Verifique se o conjunto,*

$$F = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \right\}$$

é um subespaço de \mathbb{R}^n .

Solução

Vejamos se $0 \in F$. Como o vector $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ satisfaz obviamente a equação $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, concluímos que $0 \in F$. Consideremos agora dois vectores $x, y \in F$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha x + \beta y \in F$. Faça-se $v = \alpha x + \beta y$. Queremos mostrar que $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ satisfaz a equação $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$:

$$\begin{aligned} v &= \alpha x + \beta y \iff \\ \iff (v_1, v_2, \dots, v_n) &= \alpha (x_1, x_2, \dots, x_n) + \beta (y_1, y_2, \dots, y_n) \iff \\ \iff (v_1, v_2, \dots, v_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) + (\beta y_1, \beta y_2, \dots, \beta y_n) \end{aligned}$$

Concluímos que $v_i = \alpha x_i + \beta y_i, i = 1, \dots, n$. Vejamos então se o vector,

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n)$$

satisfaz a equação $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n a_i v_i &= \sum_{i=1}^n a_i (\alpha x_i + \beta y_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n a_i x_i + \beta \sum_{i=1}^n a_i y_i \\ &\quad \text{(Porque } x, y \in F\text{)} \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Concluimos assim que F é um espaço vectorial.

Exercício 25 *Seja \mathbf{E} um espaço vectorial real. Sabendo que E_1 e E_2 são subespaços de \mathbf{E} , verifique se o conjunto $F = \{x \in E : x = x_1 - 3x_2, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$ é um subespaço de \mathbf{E} .*

Solução

Vejam os se $0 \in F$. Como $0 \in E_1$ e $0 \in E_2$ então $0 - 3 \cdot 0 \in F$. Mas $0 - 3 \cdot 0 = 0$, pelo que $0 - 3 \cdot 0 \in F$. Consideremos agora dois vectores $x, y \in F$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha x + \beta y \in F$. Faça-se $z = \alpha x + \beta y$. Queremos mostrar que z se pode escrever na forma $x = z_1 - 3z_2, z_1 \in E_1, z_2 \in E_2$:

$$\begin{aligned}z &= \alpha x + \beta y \\ &\quad \text{(Porque } x, y \in F, \exists_{x_1, y_1 \in E_1, x_2, y_2 \in E_2} \text{ tais que)} \\ &= \alpha (x_1 - 3x_2) + \beta (y_1 - 3y_2) \\ &= \alpha x_1 + \beta y_1 - 3(\alpha x_2 + \beta y_2) \\ &\quad \left(\begin{array}{l} \text{Mas } E_1 \text{ e } E_2 \text{ são subespaços vectoriais,} \\ \text{logo } \alpha x_1 + \beta y_1 \in E_1 \text{ e } \alpha x_2 + \beta y_2 \in E_2. \end{array} \right) \\ &= z_1 - 3z_2\end{aligned}$$

... onde $z_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 \in E_1$ e $z_2 = \alpha x_2 + \beta y_2 \in E_2$. Concluimos assim que F é um espaço vectorial.

Exercício 26 *Quais dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^3 são subespaços de \mathbb{R}^3 ?*

- i) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 11\}$
- ii) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = z^2\}$
- iii) $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$

Solução

- i) Vejamos se $0 \in W_1$. Obviamente que não uma vez que $0 + 0 \neq 11$. Concluimos assim que W_1 não é um espaço vectorial.
- ii) Vejamos se $0 \in W_2$. Dado que, se $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, então $x^2 - z^2 = 0^2 - 0^2 = 0$, pelo que a condição $x^2 = z^2$ é verificada e portanto $0 \in W_2$. Consideremos agora dois vectores $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in W_2$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha u + \beta v \in W_2$. Faça-se $w = \alpha u + \beta v$. Queremos mostrar que $w_1^2 = w_3^2$:

$$\begin{aligned}w &= \alpha u + \beta v \\ &= \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3) \\ &= (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \alpha u_3 + \beta v_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_1^2 - w_3^2 &= (\alpha u_1 + \beta v_1)^2 - (\alpha u_3 + \beta v_3)^2 \\ &= \alpha^2 u_1^2 + 2\alpha\beta u_1 v_1 + \beta^2 v_1^2 - \alpha^2 u_3^2 - 2\alpha\beta u_3 v_3 - \beta^2 v_3^2 \\ &= \alpha^2 (u_1^2 - u_3^2) + \beta^2 (v_1^2 - v_3^2) + 2\alpha\beta (u_1 v_1 - u_3 v_3) \\ &\quad \text{(Porque } u, v \in W_2\text{)} \\ &= 2\alpha\beta (u_1 v_1 - u_3 v_3)\end{aligned}$$

Logo, $w_1^2 - w_3^2 \neq 0$, pelo que $w_1^2 \neq w_3^2$. Concluimos assim que W_2 não é um espaço vectorial.

- iii) Vejamos se $0 \in W_3$. Dado que, se $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, então $x + 2y + z = 0 + 2 \cdot 0 + 0 = 0$, pelo que a condição $x + 2y + z = 0$ é verificada e portanto $0 \in W_3$. Consideremos agora dois vectores $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in W_3$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha u + \beta v \in W_3$. Faça-se $w = \alpha u + \beta v$. Queremos mostrar que $w_1 + 2w_2 + w_3 = 0$:

$$\begin{aligned}w &= \alpha u + \beta v \\ &= \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3) \\ &= (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \alpha u_3 + \beta v_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_1 + 2w_2 + w_3 &= \alpha u_1 + \beta v_1 + 2(\alpha u_2 + \beta v_2) + (\alpha u_3 + \beta v_3) \\ &= \alpha(u_1 + 2u_2 + u_3) + \beta(v_1 + 2v_2 + v_3) \\ &\quad \text{(Porque } u, v \in W_3\text{)} \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Logo, $w_1 + 2w_2 + w_3 = 0$, pelo que concluímos ue W_3 é um espaço vectorial.

1.4 Miscelânea

Exercício 27 Considere o espaço vectorial P_n sobre \mathbb{R} dos polinómios em x de grau não superior a n . Considere o conjunto P'_n , subconjunto de P_n , dos polinómios $p(x)$ que verificam a seguinte condição: $p(x) + p(-x) = 0$.

- a) Mostre que P'_n é um subespaço de P_n .
 b) Determine uma base e a dimensão de P'_n .

Solução

- a) De um modo geral, para mostrar que S é subespaço de um espaço vectorial V temos de mostrar que:

- i) $0 \in S$.
 ii) $\alpha u + \beta v \in S, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in S$

Se $p(x) = 0$ ter-se-á $p(-x) = 0$ pelo que $p(x) + p(-x) = 0$. Logo, $p(x) = 0 \in P'_n$.

Consideremos agora dois polinómios $p(x), q(x) \in P'_n$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha p(x) + \beta q(x) \in P'_n$. Como, por hipótese $p(x) = p(-x)$ e $q(x) = q(-x)$, ter-se-á $\alpha p(x) = \alpha p(-x)$ e $\beta q(x) = \beta q(-x)$. Consequentemente, $\alpha p(x) + \beta q(x) = \alpha p(-x) + \beta q(-x)$, o que mostra que $\alpha p(x) + \beta q(x) \in P'_n$.

- b) Estudemos os casos em que n é par ou ímpar:

n par Neste caso, os polinómios $p(x) \in P'_n$ terão a forma:

$$p(x) = 0 + \alpha_1 \cdot x + 0x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + 0x^n$$

Uma base possível será $\{x, x^3, x^5, \dots, x^{n-1}\}$ e a dimensão de P'_n será $\frac{n}{2}$.

n ímpar Neste caso, os polinómios $p(x) \in P'_n$ terão a forma:

$$p(x) = 0 + \alpha_1 \cdot x + 0x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + 0x^{n-1} + \alpha_n x^n$$

Uma base possível será $\{x, x^3, x^5, \dots, x^n\}$ e a dimensão de P'_n será $\frac{n+1}{2}$.

Exercício 28 Seja P_n o espaço vectorial sobre \mathbb{R} dos polinómios em x de grau não superior a n . Considere o conjunto \mathbf{F} , dos polinómios dos polinómios $p(x)$ pertencentes a P_n que verificam a seguinte condição: $p(0) = 0$.

- a) Mostre que \mathbf{F} é um subespaço de P_n .
b) Determine uma base e a dimensão de \mathbf{F} .

Solução

- a) Vejamos se $0 \in F$. Se $p(x) = 0$ teremos $p(0) = 0$, pelo que $0 \in F$. Consideremos agora dois polinómios $p(x), q(x) \in F$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha p(x) + \beta q(x) \in F$. Faça-se $s(x) = \alpha p(x) + \beta q(x)$. Queremos mostrar que $s(0) = 0$:

$$\begin{aligned} s(0) &= \alpha p(0) + \beta q(0) \\ &\quad (\text{Porque } p(x), q(x) \in F) \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $s(0) = 0$. Concluimos assim que F é um espaço vectorial.

- b) Consideremos um vector genérico de P_n , digamos $p(x)$, com a seguinte forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

Para que se verifique $p(0) = 0$ é necessário que:

$$\begin{aligned} p(0) = 0 &\iff \\ \iff a_n 0^n + a_{n-1} 0^{n-1} + a_{n-2} 0^{n-2} + \dots + a_1 0 + a_0 = 0 &\iff \\ \iff a_0 = 0 & \end{aligned}$$

Assim, os polinómios $p(x)$ que satisfazem $p(0) = 0$ terão de ter termo independente nulo. Concluimos que, se $p(x) \in F$, então a forma de $p(x)$ será:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x$$

O subespaço F terá como base o conjunto $\{x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x\}$ e a sua dimensão será n .

Exercício 29 Considerem-se os seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned}F_1 &= \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, 0, 0), \forall x_1 \in \mathbb{R}\} \\F_2 &= \{y \in \mathbb{R}^3 : y = (2y_2 + y_3, y_2, y_3), \forall y_2, y_3 \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Mostre que F_1 e F_2 são subespaços de \mathbb{R}^3 , indicando bases apropriadas e as respectivas dimensões.

Solução

Exercício 30 Seja $M_n(\mathbb{R})$ o espaço vectorial real das matrizes quadradas de ordem n .

- Mostre que o conjunto $H_n = \{A \in M_n : A = -A^T\}$ é um subespaço de M_n e indique a sua dimensão.
- Fazendo $n = 3$, determine uma base para o espaço H_3 .
- Considere duas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} de H_n . A matriz $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ é simétrica? Justifique.

Solução

Exercício 31 Considere o espaço vectorial \mathbb{R}^n e $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base desse espaço. Seja $x = x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n$ um vector de \mathbb{R}^n .

- Que condições devem verificar as coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n do vector \mathbf{x} para $\{x, u_2, \dots, u_n\}$ constituir uma nova base do espaço \mathbb{R}^n ?
- Determine a matriz de mudança da antiga para a nova base.

Solução

- Os vectores $\{x, u_2, \dots, u_n\}$ constituirão uma base de \mathbb{R}^n se:

$$\alpha x + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Substituamos x na hipótese e estudemos o resultado:

$$\begin{aligned} \alpha x + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha \sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{i=2}^n \alpha_i u_i = 0 &\Leftrightarrow \\ \alpha x_1 u_1 + \sum_{i=2}^n (\alpha x_i + \alpha_i) u_i = 0 & \end{aligned}$$

Sabemos que a única combinação linear nula dos vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é aquela que se obtém com os escalares todos nulos, uma vez que os vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ são linearmente independentes. Assim, deveremos ter:

$$\begin{cases} \alpha x_1 = 0 \\ \alpha x_2 + \alpha_2 = 0 \\ \dots \\ \alpha x_n + \alpha_n = 0 \end{cases}$$

O sistema acima, nas variáveis $\{\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ deverá ser possível e determinado de modo a que os vectores $\{x, u_2, \dots, u_n\}$ sejam linearmente independentes. Matricialmente, o sistema pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é sempre possível, por ser um sistema homogéneo. Será determinado se $r_A = n$, isto é, se a matriz do sistema for regular. Por seu turno, a matriz do sistema será regular se o seu determinante for não nulo. Aplicando o Teorema de Laplace à primeira linha obtém-se:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = x_1$$

concluimos portanto que o determinante da matriz do sistema é não nulo, se $x_1 \neq 0$ e portanto os vectores $\{x, u_2, \dots, u_n\}$ serão linearmente independentes se $x_1 \neq 0 \wedge x_i \in \mathbb{R}, i = 2, \dots, n$.

- b) Começemos por escrever os vectores da nova base, $\{x, u_2, \dots, u_n\}$, na base anterior, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$:

$$\begin{cases} x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n \\ u_2 = u_2 \\ \dots \\ u_n = u_n \end{cases}$$

Assim, podemos escrever matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz

$$B = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

... é a matriz de mudança de base da base $\{x, u_2, \dots, u_n\}$ para a base $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Um vector $v \in \mathbb{R}^n$ de coordenadas $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}^T$ na base $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ terá, na base $\{x, u_2, \dots, u_n\}$ coordenadas $\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix}^T$ dadas por:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Calculemos B^{-1} por condensação, não esquecendo que $x_1 \neq 0$:

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{x_1} L_1} \\
 \\
 \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{x_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
 \end{array} \right] \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + (-x_i) L_1 \quad (i = 2, \dots, n)} \\
 \\
 \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{x_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{x_2}{x_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{x_3}{x_1} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{x_n}{x_1} & 0 & 0 & \cdots & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Logo,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{x_2}{x_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{x_3}{x_1} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{x_n}{x_1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 32 Seja \mathbf{V} um espaço vectorial real de dimensão 3 e x_1, x_2, x_3 e x_4 elementos distintos de \mathbf{V} . Adicionalmente assuma que $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ é um sistema de geradores de \mathbf{V} satisfazendo a condição:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

- a) Mostre que $\{x_1, x_2, x_3\}$ é uma base de \mathbf{V} .
- b) Um raciocínio semelhante permite mostrar que $\{x_1, x_3, x_4\}$ é uma base de \mathbf{V} . Denotando as duas bases por:

$$\alpha = \{x_1, x_2, x_3\} \text{ e } \beta = \{x_1, x_3, x_4\}$$

... determine a matriz de mudança de base da base α para a base β .

Solução

- a) Começemos por mostrar que $\{x_1, x_2, x_3\}$ é um sistema de geradores de V . Seja então $v \in V$. Sabemos que existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tais que, uma vez que, por hipótese, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ é um sistema de geradores de V :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = v$$

Dado que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, então:

$$x_4 = -x_1 - x_2 - x_3$$

Substituindo na expressão de v , obtém-se:

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = v &\iff \\ \iff \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 (-x_1 - x_2 - x_3) = v &\iff \\ \iff (\alpha_1 - \alpha_4) x_1 + (\alpha_2 - \alpha_4) x_2 + (\alpha_3 - \alpha_4) x_3 = v &\iff \end{aligned}$$

Conclui-se assim que é possível escrever o vector v como combinação linear dos vectores $\{x_1, x_2, x_3\}$. Com v é um vector genérico de V , conclui-se que $\{x_1, x_2, x_3\}$ é um sistema de geradores de V . Adicionalmente, como $\dim(V) = 3$ e $\{x_1, x_2, x_3\}$ é um sistema de geradores, em número de 3, conclui-se que $\{x_1, x_2, x_3\}$ tem de ser uma base de V .

- b) Começemos por escrever os vectores da nova base, $\beta = \{x_1, x_3, x_4\}$, na base anterior, $\alpha = \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \\ x_3 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ x_4 = (-1) \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2 + (-1) \cdot x_3 \end{cases}$$

Assim, podemos escrever matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

... é a matriz de mudança de base da base $\alpha = \{x_1, x_2, x_3\}$ para a base $\beta = \{x_1, x_3, x_4\}$. Um vector $v \in V$ de coordenadas $[v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ na base $\alpha = \{x_1, x_2, x_3\}$ terá, na base $\beta = \{x_1, x_3, x_4\}$ coordenadas $[w_1 \ w_2 \ w_3]^T$ dadas por:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Calculemos B^{-1} , com recurso à Teoria dos Determinantes:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Logo, } B^{-1} = \frac{1}{|B|} \hat{B} = \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 33 *Seja \mathcal{S} um conjunto de vectores linearmente independentes do espaço vectorial \mathbf{V} sobre o corpo \mathbb{K} e \mathbf{x} um elemento de \mathbf{V} não pertencente a \mathcal{S} . Mostre que $\mathcal{S} \cup \{\mathbf{x}\}$ é um conjunto de vectores linearmente dependentes se e só se \mathbf{x} pertence ao subespaço gerado pelo conjunto \mathcal{S} .*

Solução

Seja $\mathcal{S} = \{e_1, \dots, e_p\}$.

(\implies) Suponhamos que $\mathcal{S} \cup \{\mathbf{x}\}$ é um conjunto de vectores linearmente dependentes. Pretende mostrar-se que \mathbf{x} pertence ao subespaço gerado pelo conjunto \mathcal{S} .

Se $\mathcal{S} \cup \{\mathbf{x}\}$ é um conjunto de vectores linearmente dependentes então é possível escrever uma combinação nula destes vectores com pelo menos um escalar não nulo, isto é:

$$\exists_{\alpha_i \in \mathbb{K}} : \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_p e_p + \alpha_{p+1} \mathbf{x} = 0$$

Suponhamos que $\alpha_{p+1} = 0$. Então é possível escrever uma combinação linear nula dos vectores de \mathcal{S} com pelo menos um escalar não nulo. Consequentemente, os vectores de \mathcal{S} serão, por definição, linearmente dependentes, o que é um absurdo. Logo, $\alpha_{p+1} \neq 0$. Sendo assim, poderemos escrever:

$$\begin{aligned}\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_p e_p + \alpha_{p+1} x &= 0 \iff \\ x &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_{p+1}} e_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{p+1}} e_2 - \cdots - \frac{\alpha_p}{\alpha_{p+1}} e_p\end{aligned}$$

A expressão anterior mostra que x pode ser escrito como combinação linear dos vectores de \mathcal{S} , ou, por outras palavras, x pertence ao subespaço gerado pelo conjunto \mathcal{S} .

(\Leftarrow) Suponhamos que x pertence ao subespaço gerado pelo conjunto \mathcal{S} . Pretende mostrar-se que $\mathcal{S} \cup \{x\}$ é um conjunto de vectores linearmente dependentes.

Se x pertence ao subespaço gerado pelo conjunto \mathcal{S} , então x pode ser escrito como combinação linear dos vectores de \mathcal{S} :

$$\exists_{\alpha_i \in \mathbb{K}} : x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_p e_p$$

Reorganizando os termos da expressão anterior obtemos:

$$\exists_{\alpha_i \in \mathbb{K}} : x - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \cdots - \alpha_p e_p = 0$$

Obtivemos assim uma combinação linear nula dos vectores do conjunto $\mathcal{S} \cup \{x\}$ com pelo menos um escalar não nulo (precisamente o escalar do vector x que é 1). Então os vectores do conjunto $\mathcal{S} \cup \{x\}$ são linearmente dependentes.

Exercício 34 *Seja \mathbf{A} uma matriz real de ordem \mathbf{n} . Mostre que a dimensão do subespaço gerado por $\{I, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \dots\}$ é inferior ou igual a \mathbf{n} .*

Solução

Exercício 35 *Se \mathbf{V} é um espaço vectorial real de dimensão finita e $\beta = \{x_1, \dots, x_m\}$ uma base de \mathbf{V} , diga o que entende por coordenadas de um vector $x \in V$ relativamente à base β . Indique ainda por que razão estas coordenadas se encontram definidas univocamente.*

Solução

Exercício 36 Verifique se o seguinte subconjunto de \mathbb{R}^4 é um subespaço de \mathbb{R}^4 ?

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x + y = 0, x + y + z = w\}$$

Solução

Exercício 37 Verifique se o seguinte subconjunto de \mathbb{R}^3 é um subespaço de \mathbb{R}^3 ?

$$W = \{(r, r + 2, 0) : r \in \mathbb{R}\}$$

Solução

Exercício 38 Determine o escalar \mathbf{k} de modo a que os vectores com as seguintes coordenadas sejam linearmente independentes?

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$$

Solução

Exercício 39 Determine o escalar λ de modo a que os seguintes vectores sejam linearmente independentes?

$$x_1 = (\lambda, -1, -1); x_2 = (-1, \lambda, -1); x_3 = (-1, -1, \lambda)$$

Solução

Pretende-se portanto determinar os valores de λ tais que:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\begin{aligned} & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \iff \\ \iff & \alpha_1 (\lambda, -1, -1) + \alpha_2 (-1, \lambda, -1) + \alpha_3 (-1, -1, \lambda) = 0 \iff \\ & (\alpha_1 \lambda - \alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2 \lambda - \alpha_3, -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \lambda) = 0 \end{aligned}$$

Esta expressão é equivalente, matricialmente, ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0$$

Vejam os quais as condições sobre λ para que o sistema seja possível e determinado. É esta a única solução que nos interessa, pois significa que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ é a única solução do sistema fazendo, conseqüentemente, com que os vectores dados sejam linearmente independentes. O sistema é possível se a característica da matriz do sistema é igual à ordem, isto é, se a matriz do sistema é regular.

A regularidade da matriz pode ser determinada através do cálculo do seu determinante:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + (-1) L_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{vmatrix} 0 & -1 - \lambda & -1 + \lambda^2 \\ 0 & \lambda + 1 & -1 - \lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \text{(Teorema de Laplace à 1ª coluna)} \\ & (-1)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -1 + \lambda^2 \\ \lambda + 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (-1) [(1 + \lambda)^2 - (1 + \lambda)(-1 + \lambda^2)] \\ & = (-1)(1 + \lambda) [1 + \lambda + 1 - \lambda^2] \end{aligned}$$

Concluimos assim que o determinante da matriz do sistema será nulo se $(1 + \lambda) [1 + \lambda + 1 - \lambda^2] = 0$. A solução é $\lambda = 2 \vee \lambda = -1$. Deste modo, de modo a que o sistema tenha solução determinada é necessário que $\lambda \neq 2 \wedge \lambda \neq -1$. Esta é também a condição sobre λ para que os vectores $\{x_1, x_2, x_3\}$ sejam linearmente independentes.

Exercício 40 *Seja \mathbf{W} o subespaço de \mathbb{R}^4 gerado pelos vectores?*

$$x_1 = (1, -2, 0, 3); x_2 = (2, -5, -3, 6); x_3 = (2, -1, 4, 7)$$

Verifique se o vector $v = (1, -2, 0, 3)$ pertence a \mathbf{W} .

Solução

Pretende-se determinar, se existir, um conjunto de escalares $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ tais que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = v$.

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = v &\iff \\ \iff \alpha_1 (1, -2, 0, 3) + \alpha_2 (2, -5, -3, 6) + \alpha_3 (2, -1, 4, 7) = (1, -2, 0, 3) &\iff \\ (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, -2\alpha_1 - 5\alpha_2 - \alpha_3, -3\alpha_2 + 4\alpha_3, 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 7\alpha_3) = (1, -2, 0, 3) \end{aligned}$$

Esta expressão é equivalente, matricialmente, ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Em geral, dever-se-á estudar o sistema de equações acima: se for possível, conclui-se que $v \in W$, caso contrário v não pertence ao espaço gerado pelos vectores dados.

Neste caso em particular, tem-se $v = x_1$, pelo que, se fizermos $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ teremos $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = v$ e portanto $v \in W$.

Exercício 41 *Dê uma caracterização do subespaço $W \subset E$ gerado pelos vectores com as seguintes coordenadas:*

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}; x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solução

Vamos construir uma matriz cujas linhas são os transpostos dos vectores dados:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por operações elementares sobre linhas podemos transformar a matriz A numa matriz A' . Concluimos que as linhas de A' se podem escrever como combinação linear das linhas de A . Consequentemente, as linhas de A podem ser escritas como combinação linear das linhas de A' o que significa que os vectores associados às linhas de A geram o mesmo subespaço que os vectores associados às linhas de A' . condensem então a matriz A :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_1} \\ & \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_1} \end{aligned}$$

Esta operação elementar é suficiente para verificar que W tem dimensão 2 e tem como base os vectores x_1 e x_2 dados ou, de modo equivalente os vectores obtidos por aplicação da operação elementar e que são dados por:

$$x'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}; x'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Em resumo, v pertence ao subespaço gerado por $\{x_1, x_2\}$ se e só pertence ao subespaço gerado por $\{x'_1, x'_2\}$.

Exercício 42 Qual a dimensão do subespaço de \mathbb{R}^5 gerado pelos vectores:

$$\begin{aligned} x_1 &= (2, -1, 3, 5, -2); x_2 = (2, -1, 3, 5, -2); \\ x_3 &= (5, -3, 8, 4, 1); x_4 = (1, 0, 1, 11, 7) \end{aligned}$$

Solução

Exercício 43 Determine uma base de \mathbb{R}^3 contendo os vectores $\{(1, 2, 5), (0, 1, 2)\}$.

Solução

Necessitamos de encontrar um vector (a, b, c) tal que:

$$(a, b, c) \neq \alpha_1 (1, 2, 5) + \alpha_2 (0, 1, 2), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Porquê? Porque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ e os vectores $\{(1, 2, 5), (0, 1, 2)\}$ já são linearmente independentes. Se encontrarmos um terceiro vector, (a, b, c) , que não

possa ser escrito como combinação linear dos vectores $\{(1, 2, 5), (0, 1, 2)\}$ determinamos um sistema de vectores $\{(1, 2, 5), (0, 1, 2), (a, b, c)\}$ linearmente independentes. Como são em número de 3, constituem uma base de \mathbb{R}^3 .

Consideremos então a equação:

$$\begin{aligned}\alpha_1 (1, 2, 5) + \alpha_2 (0, 1, 2) &= (a, b, c) \iff \\ \iff (\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2, 5\alpha_1 + 2\alpha_2) &= (a, b, c)\end{aligned}$$

Esta expressão é equivalente, matricialmente, ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Pretende-se obviamente, que o sistema seja impossível. Estudemos a sua matriz ampliada:

$$\begin{aligned}[A|B] &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & b \\ 5 & 2 & c \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-5)L_1 \end{array} \\ & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-2a \\ 0 & 2 & c-5a \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-1)L_2 \end{array} \\ & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-2a \\ 0 & 0 & c-2b-a \end{array} \right]\end{aligned}$$

O sistema é impossível se $r_A \neq r_{A|B}$. Como $r_A = 2$ pretende-se que $r_{A|B} = 3$. Para que tal aconteça é necessário que $c - 2b - a \neq 0$. Existem muitos vectores (a, b, c) nestas circunstâncias, por exemplo, $a = 1$ e $b = c = 0$. O vector que procuramos é portanto $(a, b, c) = (1, 0, 0)$.

Exercício 44 *Determine as coordenadas do vector $(3, 2, 1)$ na base $\{(1, 0, 2), (2, 1, 0), (0, 3, 5)\}$ em \mathbb{R}^3 .*

Solução

Pretende-se determinar escalares $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{aligned}\beta_1 (1, 0, 2) + \beta_2 (2, 1, 0) + \beta_3 (0, 3, 5) &= (3, 2, 1) \iff \\ \iff (\beta_1 + 2\beta_2, \beta_2 + 3\beta_3, 2\beta_1 + 5\beta_3) &= (3, 2, 1)\end{aligned}$$

A última igualdade é equivalente ao seguinte sistema de 3 equações nas variáveis β_1, β_2 e β_3 em que a matriz do sistema é dada por $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = 3 \\ \beta_2 + 3\beta_3 = 2 \\ 2\beta_1 + 5\beta_3 = 1 \end{cases}$$

A solução deste sistema fornecerá as coordenadas pretendidas. Sabemos que o sistema será possível e determinado uma vez que um vector se escreve de forma única numa certa base. Construamos a matriz ampliada do sistema e resolvâ-mo-lo por condensação:

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (-2)L_1} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{8}L_3} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + (-3)L_3} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{27}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + (-2)L_2} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{15}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{27}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} \end{array} \right] \end{aligned}$$

A solução do sistema será portanto $\beta_1 = -\frac{15}{4}$, $\beta_2 = \frac{27}{8}$ e $\beta_3 = -\frac{3}{8}$. Concluímos assim que:

$$\left(-\frac{15}{4}\right)(1, 0, 2) + \frac{27}{8}(2, 1, 0) + \left(-\frac{3}{8}\right)(0, 3, 5) = (3, 2, 1)$$

Exercício 45 *Mostre que as soluções do sistema de equações lineares com coeficientes reais,*

$$\begin{cases} 3x + 2y + 6z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + 8z = 0 \end{cases}$$

... constituem um subespaço de \mathbb{R}^3 . Indique uma base e a dimensão deste subespaço.

Solução

Exercício 46 Determine, para cada valor do escalar $m \in \mathbb{R}$, o subespaço de \mathbb{R}^3 que constitui solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 3x + 2y + mz = 0 \\ mx - y + 4z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

Solução

Exercício 47 Considere o espaço vectorial \mathbb{R}^3 , uma base $\alpha = \{(1, 0, 1), (0, 2, 0), (1, 2, 3)\}$ e uma base $\beta = \{(1, 0, 0), (2, 0, 1), (0, 0, 3)\}$. As coordenadas de um vector $v \in \mathbb{R}^3$ na base α são $[x \ y \ z]^T$, enquanto que na base β são dadas por $[x' \ y' \ z']^T$. Descreva matricialmente a relação entre estes dois sistemas de coordenadas.

Solução

Exercício 48 Considere os vectores de \mathbb{R}^3 :

$$a_1 = (1, 5, 9); a_2 = (2, 6, 10) \text{ e } b = (4, 8, 12)$$

- Verifique se \mathbf{b} pertence ao espaço gerado pelos vectores $\{a_1, a_2\}$.
- Verifique se $\{a_1, a_2\}$ pode gerar o espaço \mathbb{R}^3 .
- Verifique se o conjunto de vectores $\{a_1, a_2, b\}$ é linearmente independente.

Solução

a) É necessário verificar se existem escalares $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{aligned}\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 = b &\iff \\ \iff \beta_1 (1, 5, 9) + \beta_2 (2, 6, 10) = (4, 8, 12) &\iff \\ \iff (\beta_1 + 2\beta_2, 5\beta_1 + 6\beta_2, 9\beta_1 + 10\beta_2) = (4, 8, 12)\end{aligned}$$

A última igualdade é equivalente ao seguinte sistema de 3 equações nas variáveis β_1 e β_2 em que a matriz do sistema é dada por $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = 4 \\ 5\beta_1 + 6\beta_2 = 8 \\ 9\beta_1 + 10\beta_2 = 12 \end{cases}$$

Se este sistema for possível, então b pertence ao espaço gerado pelos vectores $\{a_1, a_2\}$, caso contrário, a resposta é negativa. Construamos a matriz ampliada e resolvê-mo-lo por condensação:

$$\begin{aligned}[A|B] &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (-5)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-9)L_1 \end{array} \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & -8 & -24 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + (-2)L_2 \end{array} \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]\end{aligned}$$

Dado que $r_A = r_{A|B} = 2$, o sistema é possível e determinado, logo o vector b pertence ao espaço gerado pelos vectores $\{a_1, a_2\}$ uma vez que pode ser escrito como combinação linear destes últimos.

b) A resposta é imediatamente negativa, uma vez que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Tal significa que um sistema de geradores de \mathbb{R}^3 deverá ter, no mínimo, 3 vectores, o que não é o caso. Poderemos no entanto recorrer à definição e verificar que, dado um vector genérico de \mathbb{R}^3 , digamos (x, y, z) , ne sempre é possível escrever (x, y, z) como combinação dos vectores $\{a_1, a_2\}$.

Verifiquemos assim, se existem escalares $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{aligned}\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 = (x, y, z) &\iff \\ \iff \beta_1 (1, 5, 9) + \beta_2 (2, 6, 10) = (x, y, z) &\iff \\ \iff (\beta_1 + 2\beta_2, 5\beta_1 + 6\beta_2, 9\beta_1 + 10\beta_2) = (x, y, z)\end{aligned}$$

A última igualdade é equivalente ao seguinte sistema de 3 equações nas variáveis β_1 e β_2 em que a matriz do sistema é dada por $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = x \\ 5\beta_1 + 6\beta_2 = y \\ 9\beta_1 + 10\beta_2 = z \end{cases}$$

Se este sistema for possível para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então os vectores $\{a_1, a_2\}$ serão geradores de \mathbb{R}^3 , caso contrário, a resposta é negativa. Construamos a matriz ampliada e resolvê-mo-lo por condensação:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 5 & 6 & y \\ 9 & 10 & z \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (-5)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-9)L_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -4 & y - 5x \\ 0 & -8 & z - 9x \end{array} \right] \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + (-2)L_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & z - 2y + x \end{array} \right]$$

Assim, o sistema será possível se $z - 2y + x = 0$. Qualquer vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que não satisfaça esta condição não pode ser escrito como combinação linear dos vectores $\{a_1, a_2\}$. Concluimos assim que $\{a_1, a_2\}$ não são suficientes para gerar o espaço \mathbb{R}^3 .

- c) Tipicamente, construimos uma combinação linear nula destes vectores e verificamos se é satisfeita apenas com os escalares nulos. Se a resposta for afirmativa os vectores são linearmente independentes, caso contrário serão linearmente dependentes.

$$\begin{aligned} \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 b &= 0 \iff \\ \iff \beta_1 (1, 5, 9) + \beta_2 (2, 6, 10) + \beta_3 (4, 8, 12) &= 0 \iff \\ \iff (\beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3, 5\beta_1 + 6\beta_2 + 8\beta_3, 9\beta_1 + 10\beta_2 + 12\beta_3) &= (4, 8, 12) \end{aligned}$$

A última igualdade é equivalente ao seguinte sistema de 3 equações nas variáveis β_1, β_2 e β_3 em que a matriz do sistema é dada por $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3 = 0 \\ 5\beta_1 + 6\beta_2 + 8\beta_3 = 0 \\ 9\beta_1 + 10\beta_2 + 12\beta_3 = 0 \end{cases}$$

Se o sistema for determinado (possível é sempre, por ser homogéneo), a única solução será $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes. Pretende-se portanto que o sistema seja determinado, isto é $r_A = 3$.

Construamos a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característica:

$$[A|B] = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 8 & 0 \\ 9 & 10 & 12 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (-5)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-9)L_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -12 & 0 \\ 0 & -8 & -24 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + (-2)L_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Dado que $r_A = r_{A|B} = 2 < 3$, o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $d = n - r_A = 3 - 2 = 1$, o que significa que existem outras soluções para o sistema que não a solução $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados são linearmente dependentes.