

Álgebra Linear - Exercícios

Índice

1	Valores e Vectores Próprios	3
---	-----------------------------	---

1 Valores e Vectores Próprios

Exercício 1 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ real. Determine uma matriz \mathbf{P} tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

Solução

A diagonalização da matriz A é possível se a soma das dimensões dos subespaços próprios associados aos valores próprios da matriz A for igual a 3, isto é, se as multiplicidades geométricas dos valores próprios somarem 3 (a ordem da matriz A).

Determinemos os valores próprios de A resolvendo a equação característica $|A - \lambda I| = 0$:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 4 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(2 - \lambda)(-3 - \lambda) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\iff |A - \lambda I| = 0 \iff \\ &\iff (1 - \lambda)(2 - \lambda)(-3 - \lambda) = 0 \iff \\ &\lambda = 1 \vee \lambda = 2 \vee \lambda = -3 \end{aligned}$$

Os valores próprios da matriz A são portanto $\{1, 2, -3\}$.

Sabendo que a multiplicidade geométrica de um valor próprio não excede a sua multiplicidade algébrica e que a multiplicidade geométrica é sempre, pelo menos 1, resulta que as multiplicidades geométricas associadas a cada um dos valores próprios determinados é exactamente 1. A soma destas multiplicidades é 3, pelo que a matriz A é diagonalizável.

Determinemos os subespaços próprios associados a cada um dos valores próprios:

- $\lambda = 1$

Pretende-se resolver a equação matricial $(A - \lambda I)x = 0$:

$$\begin{aligned} &(A - \lambda I)x = 0 \iff \\ &\iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Esta equação corresponde ao sistema de equações:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \iff x_2 = x_3 = 0, x_1 \in \mathbb{R}$$

Logo o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$ será dado por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}$$

Assim o subespaço próprio associado a $\lambda = 1$ é gerado pelo vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- $\lambda = 2$

Pretende-se resolver a equação matricial $(A - \lambda I)x = 0$:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)x = 0 &\iff \\ \iff \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Esta equação corresponde ao sistema de equações:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = 5x_3 \end{cases}$$

Logo o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$ será dado por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 5x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R}$$

Assim o subespaço próprio associado a $\lambda = 2$ é gerado pelo vector $\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- $\lambda = -3$

Pretende-se resolver a equação matricial $(A - \lambda I)x = 0$:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)x = 0 &\iff \\ \iff \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Esta equação corresponde ao sistema de equações:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Logo o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = -3$ será dado por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R}$$

Assim o subespaço próprio associado a $\lambda = -3$ é gerado pelo vector $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Assim, a matriz P que procuramos será constituída pelos vectores próprios associados a cada um dos valores próprios determinados:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz diagonal será composta pelos valores próprios associados aos vectores próprios representados em P , pela mesma ordem, logo:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Exercício 2 Considere uma transformação linear em \mathbb{R}^3 dada por:

$$T_1(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3)$$

Determine, se possível, uma base \mathbb{R}^3 de tal que a matriz da transformação seja diagonal.

Solução

Consideremos a base canónica de \mathbb{R}^3 :

$$\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

Começemos por determinar a matriz da transformação na base canónica:

$$\begin{cases} T_1(e_1) = T_1(1, 0, 0) = (2, 1, -1) = 2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + (-1) \cdot e_3 \\ T_1(e_2) = T_1(0, 1, 0) = (-1, 0, 1) = (-1) \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\ T_1(e_3) = T_1(0, 0, 1) = (-1, -1, 2) = (-1) \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2 + 2 \cdot e_3 \end{cases}$$

A matriz da transformação, A_1 , será uma matriz do tipo 3×3 cujas colunas são as coordenadas de $T_1(e_i)$ na base $\{e_i\}$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinemos agora os valores próprios de A_1 resolvendo a equação característica $|A_1 - \lambda I| = 0$:

$$\begin{aligned} |A_1 - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \begin{pmatrix} C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \\ C_2 \leftarrow C_2 + \lambda C_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2\lambda + \lambda^2 - 1 & 1 - \lambda \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 - \lambda & 1 - \lambda \end{vmatrix} \text{ (Teorema de Laplace à 2ª linha)} \\ &= 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2\lambda - \lambda^2 - 1 & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 2\lambda - \lambda^2 - 1 & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -(2\lambda - \lambda^2 - 1)(1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2 \\ &= (1 - \lambda)(1 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 1) \\ &= (1 - \lambda)(2 - 3\lambda + \lambda^2) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\iff |A_1 - \lambda I| = 0 \iff \\ &\iff (1 - \lambda)(2 - 3\lambda + \lambda^2) = 0 \iff \\ &\lambda = 1 \text{ (raiz dupla)} \vee \lambda = 2 \end{aligned}$$

Os valores próprios da matriz A_1 são portanto $\{1, 2\}$. O valor próprio $\lambda = 1$ tem multiplicidade algébrica 1 enquanto que o valor próprio $\lambda = 2$ tem multiplicidade algébrica 2.

Sabendo que a multiplicidade geométrica de um valor próprio não excede a sua multiplicidade algébrica e que a multiplicidade geométrica é sempre, pelo menos 1, resulta que as multiplicidades geométricas associadas a cada um dos valores próprios determinados é pelo menos 1. A matriz A_1 será diagonalizável se a multiplicidade geométrica associada ao valor próprio $\lambda = 1$ for exactamente 2, caso contrário não será possível construir uma matriz diagonalizadora.

Determinemos os subespaços próprios associados a cada um dos valores próprios:

- $\lambda = 1$

Pretende-se resolver a equação matricial $(A_1 - \lambda I)x = 0$:

$$\begin{aligned} &(A_1 - \lambda I)x = 0 \iff \\ &\iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Construamos a matriz ampliada para deduzir a solução geral da equação:

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + (-1)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-1)L_1}} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Como $r_{A_1|B} = r_A = 1 < 3$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $n - r = 3 - 1 = 2$. Sabemos assim que a multiplicidade geométrica do valor próprio $\lambda = 1$ (sendo igual à dimensão do subespaço próprio associado) é 2. Determinemos uma base deste subespaço. Observemos que o sistema $(A_1 - \lambda I)x = 0$, para $\lambda = 1$, corresponde à equação:

$$\{ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \iff \{ x_1 = x_2 + x_3$$

Logo o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$ será dado por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

Assim o subespaço próprio associado a $\lambda = 1$ é gerado pelos vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- $\lambda = 2$

Pretende-se resolver a equação matricial $(A_1 - \lambda I)x = 0$:

$$\begin{aligned} (A_1 - \lambda I)x = 0 &\iff \\ \iff \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Construamos a matriz ampliada para deduzir a solução geral da equação:

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \underline{L_1 \longleftrightarrow L_2} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \underline{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \underline{L_3 \leftarrow L_3 + (-1)L_2} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \underline{L_1 \leftarrow L_1 + (-2)L_2} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Como $r_{A_1|B} = r_A = 2 < 3$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $n - r = 3 - 2 = 1$. Sabemos assim que a multiplicidade geométrica do valor próprio $\lambda = 2$ (sendo igual à dimensão do subespaço

próprio associado) é 1. Determinemos uma base deste subespaço. Observemos que o sistema $(A_1 - \lambda I)x = 0$, para $\lambda = 2$, corresponde ao sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Logo o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$ será dado por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R}$$

Assim o subespaço próprio associado a $\lambda = 2$ é gerado pelo vectore $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Como a soma das multiplicidades geométricas associadas aos dois valores próprios é exactamente igual à ordem da matriz A_1 concluímos que a matriz A_1 da transformação T_1 é diagonalizável. Isto é, existe uma matriz B , tal que $\hat{A}_1 = B^{-1}A_1B$.

Assim, enquanto que a matriz A_1 representa a transformação T_1 na base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$, a matriz \hat{A}_1 representa a mesma transformação mas numa base $\{v_1, v_2, v_3\}$, obtida de $\{e_1, e_2, e_3\}$ através da matriz de mudança de base B .

Ora, B é uma matriz cujas colunas são as coordenadas de $\{v_1, v_2, v_3\}$ na base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Mas, neste caso, as coordenadas são precisamente as coordenadas dos vectores próprios de A_1 . Por outras palavras, a base $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base constituída pelos vectores próprios de A_1 .

Resulta assim que \hat{A}_1 é uma matriz diagonal cujos elementos principais são os valores próprios de A_1 pela ordem em que os respectivos vectores próprios estão representados nas colunas de B . Assim, se,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

..., teremos a transformação T_1 representada pela matriz,

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

..., se escolhermos a base $\{v_1, v_2, v_3\}$, isto é, se escolhermos como base os vectores próprios de A_1 .

Exercício 3 *Mostre que, se a matriz \mathbf{A} é diagonalizável, então existe uma matriz \mathbf{P} tal que $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$, onde Λ é uma matriz diagonal.*

Solução

Se a matriz A é diagonalizável então existe certamente uma matriz Q , regular, tal que $D = Q^{-1}AQ$ e D é uma matriz diagonal. Multiplicando à esquerda de cada termo por Q e à direita por Q^{-1} obteremos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} D &= Q^{-1}AQ \iff QDQ^{-1} = (QQ^{-1})A(QQ^{-1}) \iff \\ &\iff QDQ^{-1} = IAI \iff A = QDQ^{-1} \end{aligned}$$

Elevemos cada um dos termos desta igualdade à potência de ordem n :

$$\begin{aligned} A^n &= (QDQ^{-1})^n \\ &= \underbrace{(QDQ^{-1})(QDQ^{-1})\dots(QDQ^{-1})(QDQ^{-1})}_{n \text{ factores}} \end{aligned}$$

Poderemos associar os factores desta última expressão de modo diferente de modo a obtermos:

$$A^n = QD(Q^{-1}Q)DQ^{-1}\dots QD(Q^{-1}Q)DQ^{-1}$$

Temos assim $n - 1$ produtos $Q^{-1}Q = I$, pelo que, na realidade, teremos:

$$A^n = Q\underbrace{DD\dots DD}_{n \text{ factores}}Q^{-1}$$

Resulta portanto $A^n = QD^nQ^{-1}$. Fazendo $P = Q$ e $\Lambda = D$ obteremos o resultado pretendido.

Exercício 4 *Considere matriz \mathbf{A} , real, diagonalizável e suponha que conhece os seus valores próprios e uma matriz \mathbf{B} diagonalizadora. Com base exclusivamente nesta informação determine A^k (\mathbf{k} inteiro positivo).*

Solução

Sabemos que, se A é diagonalizável, a matriz, D , diagonal que lhe está associada tem como elementos diagonais os valores próprios de A , neste caso, conhecidos. Adicionalmente, saberemos que $D = BAB^{-1}$. Multiplicando à esquerda de cada termo por B e à direita por B^{-1} obteremos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} D &= B^{-1}AB \iff BDB^{-1} = (BB^{-1})A(BB^{-1}) \iff \\ &\iff BDB^{-1} = IAI \iff A = BDB^{-1} \end{aligned}$$

Elevemos cada um dos termos desta igualdade à potência de ordem n :

$$\begin{aligned} A^n &= (BDB^{-1})^n \\ &= \underbrace{(BDB^{-1})(BDB^{-1})\dots(BDB^{-1})(BDB^{-1})}_{n \text{ factores}} \end{aligned}$$

Poderemos associar os factores desta última expressão de modo diferente de modo a obtermos:

$$A^n = BD(B^{-1}B)DB^{-1}\dots BD(B^{-1}B)DB^{-1}$$

Temos assim $n - 1$ produtos $B^{-1}B = I$, pelo que, na realidade, teremos:

$$A^n = \underbrace{BDD\dots DDB^{-1}}_{n \text{ factores}}$$

Resulta portanto $A^n = B.D^n.B^{-1}$. Conhecidas as matrizes B e D conheceremos A^n (note-se que a potência de ordem n de uma matriz diagonal é ainda uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são as potencias de ordem n daquela matriz diagonal).

Exercício 5 Considere \mathbf{A} uma matriz conhecida, quadrada de ordem \mathbf{n} , com \mathbf{n} valores próprios distintos. Considere a equação matricial $\mathbf{AZ} = \mathbf{ZA}$.

- Supondo que \mathbf{x} é um vector próprio de \mathbf{A} associado ao valor próprio λ , mostre que \mathbf{Zx} é também um vector próprio de \mathbf{A} associado ao mesmo valor próprio.
- Prove que \mathbf{x} é também vector próprio de \mathbf{Z} .

Solução

a) Pretende-se mostrar que $(A - \lambda I) Zx = 0$, sabendo que $(A - \lambda I)x = 0$:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I) Zx &= AZx - \lambda Zx \\ &= ZAx - Z(\lambda x) \\ &= Z(Ax - \lambda x) \\ &= Z(A - \lambda I)x = 0 \end{aligned}$$

b) Sabemos que *i*) $(A - \lambda I)x = 0$ e *ii*) $(A - \lambda I)Zx = 0$ por *a*). Subtraindo a primeira da segunda equação obtém-se:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)Zx - (A - \lambda I)x &= 0 \iff \\ \iff (A - \lambda I)(Zx - x) &= 0 \end{aligned}$$

Note-se que a matriz tem n valores próprios distintos o que implica que os subespaços próprios têm dimensão 1. O subespaço associado ao valor próprio λ terá como base um único elemento: dado que x é um vector próprio associado a λ poderemos tomar aquele como base do subespaço próprio. Ora, a equação $(A - \lambda I)(Zx - x) = 0$ mostra que $(Zx - x)$ é um valor próprio de λ e portanto pertencerá ao subespaço próprio respectivo. Este subespaço próprio tem como base $\{x\}$ logo $\exists_{\alpha \in \mathbb{K}} : Zx - x = \alpha x$. Reescrevendo esta última expressão temos:

$$\begin{aligned} Zx - x &= \alpha x \iff \\ \iff Zx - x - \alpha x &= 0 \iff \\ \iff (Z - (1 + \alpha)I)x &= 0 \end{aligned}$$

Concluimos assim que x é vector próprio de Z associado ao valor próprio $1 + \alpha$.

Exercício 6 Considere o espaço das matrizes reais, quadradas de ordem 2, $M_2(\mathbb{R})$ e a seguinte transformação linear de $M_2(\mathbb{R})$ em $M_2(\mathbb{R})$:

$$T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c & a + c \\ b - 2c & d \end{bmatrix}$$

- Determine os valores próprios da transformação linear definida.
- Determine bases para os respectivos subespaços próprios.

Solução

Exercício 7 Seja \mathbf{T} uma transformação linear no espaço das matrizes reais quadradas de ordem \mathbf{n} , tal que $T(A) = A^T$. Determine os valores e vectores próprios desta transformação.

Solução

Exercício 8 Seja a matriz,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Considerando a diagonalização desta matriz, determine a expressão de A^n .

Solução

Exercício 9 Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Mostre que os valores próprios de \mathbf{A} podem ser calculados em função de $\text{tr}(A)$ e $|A|$.

Solução

Exercício 10 Seja \mathbf{A} uma matriz de ordem \mathbf{n} diagonalizável. Sabendo que \mathbf{B} é uma matriz diagonalizadora de \mathbf{A} , prove que $\text{tr}(A) = \text{tr}(B^{-1}AB)$.

Solução

Exercício 11 Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os valores próprios de uma matriz real e simétrica $A = [a_{ij}]$ de ordem \mathbf{n} . Mostre que:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

Solução

Exercício 12 Seja \mathbf{A} uma matriz quadrada de ordem 3 e $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = 6$ os seus valores próprios. Determine os valores próprios da matriz $B = A^2 - I$.

Solução

Pretende-se resolver a equação característica $|B - \lambda I| = 0$.

$$\begin{aligned}|B - \lambda I| &= |A^2 - I - \lambda I| \\ &= |A^2 - (\lambda + 1)I^2| \\ &= \left| (A - \sqrt{\lambda + 1}I) (A + \sqrt{\lambda + 1}I) \right|\end{aligned}$$

Note-se que, em geral $(A^2 - B^2) \neq (A + B)(A - B)$, dado que A e B não são geralmente comutáveis e portanto $AB \neq BA$. Neste caso, a igualdade verifica-se porque $B = I$ e a identidade é sempre comutável ($AI = IA = A$). Prossigamos:

$$\left| (A - \sqrt{\lambda + 1}I) (A + \sqrt{\lambda + 1}I) \right| = |A - \sqrt{\lambda + 1}I| |A + \sqrt{\lambda + 1}I|$$

Concluimos assim que:

$$|B - \lambda I| = 0 \iff |A - \sqrt{\lambda + 1}I| = 0 \vee |A + \sqrt{\lambda + 1}I| = 0$$

Conhecendo os valores próprios de A , sabemos que serão raízes do polinómio $|A - \sqrt{\lambda + 1}I| = 0$, na variável $\sqrt{\lambda + 1}$. Deveremos portanto ter:

$$\sqrt{\lambda + 1} = 2 \vee \sqrt{\lambda + 1} = 4 \vee \sqrt{\lambda + 1} = 6$$

Resulta que:

$$\lambda = 3 \vee \lambda = 15 \vee \lambda = 35$$

... serão as raízes de $|B - \lambda I| = 0$ e portanto os valores próprios de B . Note-se que não foi necessário estudar a equação $|A + \sqrt{\lambda + 1}I| = 0$ uma vez que $|B - \lambda I|$ é um polinómio do 3º grau para o qual foi possível determinar três raízes. Não podendo existir mais raízes, conclui-se então que $|A + \sqrt{\lambda + 1}I| \neq 0, \forall \lambda$.

Exercício 13 Seja \mathbf{A} uma matriz real simétrica de ordem 3, não invertível. Sabendo que,

$$\text{tr}(A) = 8; A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$$

- a) *Determine os valores próprios da matriz \mathbf{A} .*
b) *Sabendo que $a_{12} = a_{22} \neq 0$, determine a matriz \mathbf{A} .*

Solução

Exercício 14 *Seja \mathbf{A} uma matriz quadrada de ordem 2 com valores próprios 1 e 0 correspondendo respectivamente aos vectores próprios $(1, 3)$ e $(3, -1)$. Mostre que \mathbf{A} é simétrica.*

Solução

Sabemos que A é diagonalizável uma vez que as multiplicidades geométricas dos valores próprios somam 2 (a ordem da matriz A). Sendo Assim, sabemos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, sabemos que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Determinemos $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$ através da matriz adjunta:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \hat{A} \\ &= \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mostrámos assim, que A é simétrica.

Exercício 15 *Seja \mathbf{A} uma matriz quadrada real. Prove que, se λ é um valor próprio de \mathbf{A} , então λ é um valor próprio de A^T com as mesmas multiplicidades algébrica e geométrica.*

Solução

- A equação característica da matriz A^T é dada por $|A^T - \lambda I|$. Vejamos que é igual à equação característica da matriz A :

$$\begin{aligned}|A^T - \lambda I| &= |A^T - \lambda I^T| \\ &= |(A - \lambda I)^T| \\ &= |A - \lambda I|\end{aligned}$$

Prova-se assim que A e A^T têm os mesmos valores próprios e, consequentemente estes terão as mesmas multiplicidades algébricas.

- Sejam S_λ o subespaço próprio associado ao valor próprio λ de A e S_λ^T o subespaço próprio associado ao valor próprio λ de A^T . Pretende-se mostrar que $\dim(S_\lambda) = \dim(S_\lambda^T)$.

Exercício 16 *Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Determine matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{D} tais que $Q^{-1}AQ = D$.*

Solução

Exercício 17 *Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Mostre que, se λ é um valor próprio de \mathbf{A} , então $\lambda^3 - \lambda^2 + 7$ é um valor próprio de $A^3 - A^2 + 7I$.*

Solução

Pretende-se resolver a equação característica $|(A^3 - A^2 + 7I) - (\lambda^3 - \lambda^2 + 7)I| = 0$.

$$\begin{aligned}|(A^3 - A^2 + 7I) - (\lambda^3 - \lambda^2 + 7)I| &= |A^3 - \lambda^3 I - A^2 + \lambda^2 I + 7I - 7I| \\ &= |(A^3 - \lambda^3 I) - (A^2 - \lambda^2 I)|\end{aligned}$$

Exercício 18 Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostre que, se 17 é um valor próprio de \mathbf{A} , 34 é um valor próprio de $2\mathbf{A}$.

Solução

Pretende-se resolver a equação característica $|2A - 34I| = 0$, sabendo que $|A - 17I| = 0$.

$$\begin{aligned} |2A - 34I| &= |2(A - 17I)| \\ &= 2^n |A - 17I| \\ &\quad (\text{por hipótese } 17 \text{ é valor próprio de } A) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conclui-se assim que 34 é valor próprio de $2A$.

Exercício 19 Quais são as multiplicidades algébricas dos valores próprios da transformação linear **diferenciação**, $D(\cdot)$ sobre o espaço dos polinómios reais de grau inferior ou igual a 3, P_3 ? Quais as dimensões dos espaços próprios? Será a matriz da transformação \mathbf{D} diagonalizável?

Solução

Exercício 20 Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Mostre que:

- Se soma dos elementos de cada linha é igual a \mathbf{s} então \mathbf{s} é um valor próprio de \mathbf{A} .
- Se soma dos elementos de cada coluna é igual a \mathbf{r} então \mathbf{r} é um valor próprio de \mathbf{A} .

Solução

- Consideremos o caso $n = 3$ que será facilmente generalizável: seja $A \in M_3(\mathbb{K})$ uma matriz cuja soma dos elementos de cada linha é s . Pretende-se mostrar que s é valor próprio de A , para o que temos de calcular o determinante $|A - sI|$:

$$\begin{aligned} |A - sI| &= \left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - s \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Substituindo a primeira coluna pela que se obtém somando-lhe as restantes, não altera o valor do determinante uma vez que corresponde à aplicação de 2 operações de Jacobi sobre colunas. Obter-se-á:

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} a_{11} - s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - s \end{array} \right| \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\ \left| \begin{array}{ccc} a_{11} - s + a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a_{22} - s & a_{22} - s & a_{23} \\ a_{31} + a_{32} & a_{32} & a_{33} - s \end{array} \right| \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ \left| \begin{array}{ccc} a_{11} - s + a_{12} + a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a_{22} - s + a_{23} & a_{22} - s & a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} - s & a_{32} & a_{33} - s \end{array} \right| \end{array}$$

É óbvio que a primeira coluna será nula e o determinante, $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - s & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} - s \end{vmatrix}$,

será nulo, o que mostra que s é valor próprio de A .

A generalização para qualquer dimensão n é simples: aplicam-se sucessivamente $n - 1$ operações de Jacobi sobre colunas, $C_1 \leftarrow C_1 + C_j, j = 1, \dots, n$, de modo que a matriz cujo determinante se pretende calcular tem a primeira coluna nula, no que resulta um determinante nulo e a prova de que s é um valor próprio de A .

Exercício 21 *Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$. Os valores próprios de A são 1.1 e 0.4. Os vectores próprios respectivos são $\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$ e $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$. Seja $\{x_k\}_{k \geq 0}$ uma solução para a equação $x_{k+1} = Ax_k$ com $x_0 = \begin{bmatrix} 7 & -4 \end{bmatrix}^T$. Determine uma expressão explícita para x_k , envolvendo \mathbf{k} e os vectores próprios v_1 e v_2 .*

Solução

Exercício 22 *Mostre que, se \mathbf{A} é uma matriz quadrada de ordem \mathbf{n} , diagonalizável e regular, então A^{-1} também é diagonalizável.*

Solução

Se a matriz A é diagonalizável então existe certamente uma matriz Q , regular, tal que $D = Q^{-1}AQ$ e D é uma matriz diagonal. Multiplicando à esquerda de cada termo por Q e à direita por Q^{-1} obteremos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} D = Q^{-1}AQ &\iff QDQ^{-1} = (QQ^{-1})A(QQ^{-1}) \iff \\ &\iff QDQ^{-1} = IAI \iff A = QDQ^{-1} \end{aligned}$$

Como A é regular existirá A^{-1} , pelo que:

$$\begin{aligned} A = QDQ^{-1} &\iff A^{-1} = (QDQ^{-1})^{-1} \iff \\ &\iff A^{-1} = QD^{-1}Q^{-1} \end{aligned}$$

Multiplicando à esquerda de cada termo por Q^{-1} e à direita por Q obteremos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} Q^{-1}A^{-1}Q &= (Q^{-1}Q)D^{-1}(Q^{-1}Q) \iff Q^{-1}A^{-1}Q = ID^{-1}I \iff \\ &\iff Q^{-1}A^{-1}Q = D^{-1} \end{aligned}$$

A matriz D^{-1} é a matriz diagonal cujos elementos são os inversos dos elementos principais da matriz diagonal D , justificando que A^{-1} é diagonalizável.

Exercício 23 *Assuma que todos os valores próprios de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ são, em valor absoluto, menores que 1. Mostre que, neste caso, a matriz $I - A$ é regular.*

Solução

Calculemos $|I - A|$. Sabemos que $(-1)^n |A - I|$. Se $|A - I| = 0$ então é porque A tem como valor próprio 1, o que absurdo, por hipótese. Concluimos portanto que $|A - I| \neq 0$ e que por conseguinte $|I - A| \neq 0$ o que justifica a regularidade de $I - A$.

Exercício 24 *Determine os valores próprios respectivos subespaços próprios das seguintes transformações lineares:*

- a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $T(x, y) = (2x - y, 0)$
- b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $T(x, y) = (2x - y, x)$
- c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $T(x, y, z) = (2x - y, 0, y + z)$
- d) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $T(x, y, z) = (0, 0, y)$

Solução

Exercício 25 O vector $v = (1, -1)$ é um vector próprio da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

a) Qual é o valor próprio correspondente.

b) Calcule $A^{1998}v$.

Solução

Exercício 26 Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Para cada valor próprio de \mathbf{A} determine o respectivos subespaços próprios, dimensões e bases.

Solução

Exercício 27 Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $C \in M_n(\mathbb{R})$ regular. Mostre que os valores próprios de \mathbf{A} e $B = C^{-1}AC$ são os mesmos.

Solução

Pretende mostrar-se que os polinómios característicos $|A - \lambda I|$ e $|B - \lambda I|$ são as mesmas:

$$\begin{aligned} |B - \lambda I| &= |C^{-1}AC - \lambda I| \\ &= |C^{-1}AC - \lambda IC^{-1}C| \\ &= |C^{-1}AC - \lambda C^{-1}IC| \\ &= |C^{-1}(AC - \lambda IC)| \\ &= |C^{-1}(A - \lambda I)C| \\ &= |C^{-1}| |A - \lambda I| |C| \\ &= |C|^{-1} |A - \lambda I| |C| \\ &= |A - \lambda I| \end{aligned}$$

O resultado fica assim comprovado.

Exercício 28 *Mostre que, se o produto dos valores próprios de uma matriz \mathbf{A} é não nulo então \mathbf{A} é regular.*

Solução

Sabendo que o determinante de uma matriz A é igual ao produto dos seu valores próprios, resulta que, se nenhum dos valores próprios é nulo, o seu produto também não será. Consequentemente $|A| \neq 0$ o que prova a regularidade de A .

Exercício 29 *Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Determine x de modo a que u seja um vector próprio de \mathbf{A} .

Solução

O valor de x deverá ser tal que $(A - \lambda I)u = 0$. Como se pode observar, o valor próprio associado será determinado simultaneamente:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)u &= 0 \iff \\ \iff \left(\begin{bmatrix} 2 & x \\ 1 & -5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= 0 \iff \\ \iff \begin{bmatrix} 2 - \lambda & x \\ 1 & -5 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= 0 \iff \\ \iff \begin{bmatrix} 2 - \lambda - x \\ 6 + \lambda \end{bmatrix} = 0 &\iff \begin{cases} \lambda = -6 \\ x = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Deveremos portanto ter $x = 8$ a que corresponde o valor próprio $\lambda = -6$.

Exercício 30 *Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

- Mostre, calculando Au_1 que u_1 é um vector próprio de \mathbf{A} .*
- Qual o valor próprio associado ao vector próprio u_1 .*

Solução

$$\begin{aligned} \text{a) } Au_1 &= \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \\ &= (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)u_1 \end{aligned}$$

Concluimos assim que $Au_1 = (-1)u_1$, isto é $Au_1 - (-1)u_1 = 0$. Colocando u_1 em evidência, obtém-se $(A - (-1)I)u_1 = 0$, o que mostra que u_1 é valor próprio de A .

- b) De *a)* verificámos que $(A - (-1)I)u_1 = 0$ mostrando que -1 é valor próprio de A associado ao vector próprio u_1 .

Exercício 31 *Verifique se cada uma das seguintes matrizes reais é diagonalizável:*

$$\begin{array}{ll} a) A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 9 \end{bmatrix} & b) A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ c) A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 5 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} & c) A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Solução

Exercício 32 *Considere as seguintes matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Para cada matriz responda às seguintes questões:

- Determine o respectivo polinómio característico.*
- Determine os respectivos valores próprios.*
- Indique a multiplicidade algébrica de cada valor próprio determinado em b).*
- Determine uma base para cada espaço próprio.*
- Indique a multiplicidade geométrica de cada valor próprio determinado em b).*
- Justifique se a matriz é diagonalizável. Em caso afirmativo qual a matriz diagonal e a matriz diagonalizadora?*

Solução

Exercício 33 Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ -4 & 0 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

- a) Determine o polinómio característico de \mathbf{A} .
- b) Determine os valores próprios de \mathbf{A} .
- c) Indique a multiplicidade algébrica de cada valor próprio determinado em b).
- d) Determine uma base para cada espaço próprio de \mathbf{A} .
- e) Indique a multiplicidade geométrica de cada valor próprio determinado em b).
- f) Justifique se \mathbf{A} é diagonalizável. Em caso afirmativo qual a matriz diagonal e a matriz diagonalizadora?
- g) Mostre que \mathbf{A} é singular.
- h) Calcule $\det(A - 8I)$.

Solução

Exercício 34 Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & h & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- a) Mostre que, se $h \neq 0$, \mathbf{A} é diagonalizável.
- b) Para que valores de \mathbf{h} será \mathbf{A} regular?

Solução